Dérivation

www.mathmaurer.com – Cours – 1ère ES-L

I – Équations de droites

On se place dans un plan muni d'un repère.

Propriété 1: – Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme :

$x = a$ avec a réel fixé.

– Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées a une **équation réduite** de la forme :

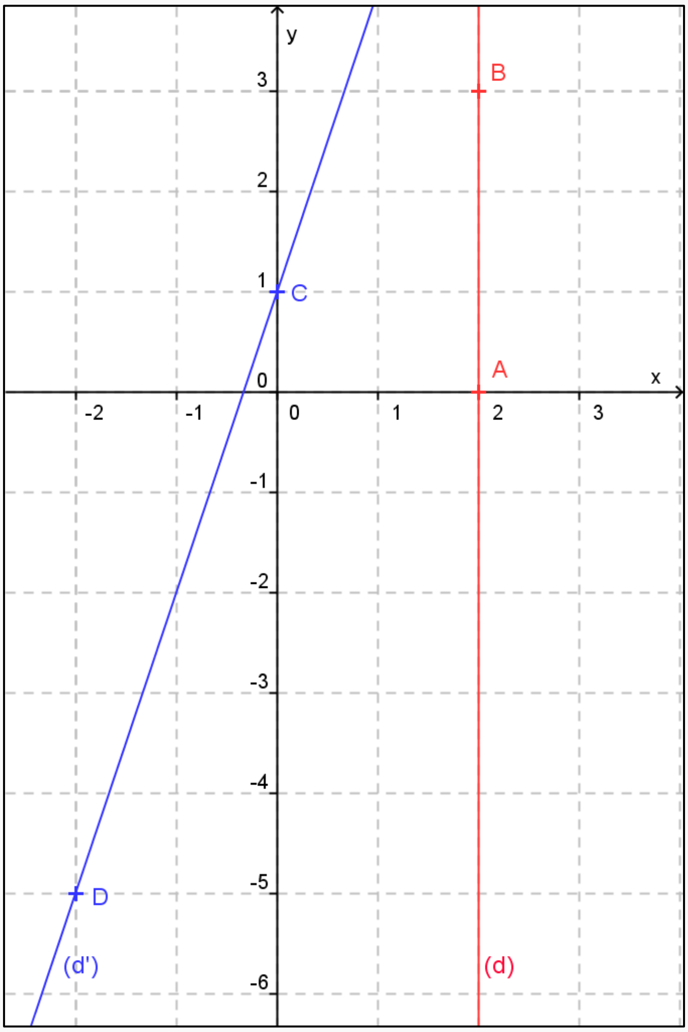
$y = m\,x + p$ avec m , p réels fixés

Vocabulaire : – Le réel m s'appelle le **coefficient directeur** de la droite.
– Le réel p s'appelle l'**ordonnée à l'origine**.

Propriété 2: Un point appartient à une droite si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de cette droite.

Tracer une droite d'équation donnée

Soit (d): $x = 2$ et (d'): $y = 3x + 1$.
Pour tracer une droite, il suffit de construire 2 points distincts de cette droite.



• Tout point d'abscisse égale à 2 appartient à (d)
donc A(2 ; 0) ∈ (d)
et B(2 ; 3) ∈ (d) .

• Si $x = 0$ alors $y = 3 \times 0 + 1 = 1$
donc C(0 ; 1) ∈ (d').

Si $x = -2$ alors $y = 3 \times (-2) + 1 = -5$
donc D(–2 ; –5) ∈ (d').

Remarque : L'équation de l'axe des abscisses (Ox) est $y = 0$.
L'équation de l'axe des ordonnées (Oy) est $x = 0$.

Propriété 3: Soit $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points du plan tels que $x_A \neq x_B$.

Le **coefficient directeur** de la droite (AB) est $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Interprétation graphique du coefficient directeur

Dans un repère (O ,I ,J) orthonormé,
ABC est rectangle en C

donc $\tan\alpha = \dfrac{CB}{CA} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = m$

donc le coefficient directeur *m* de la droite détermine la **pente** de la droite.

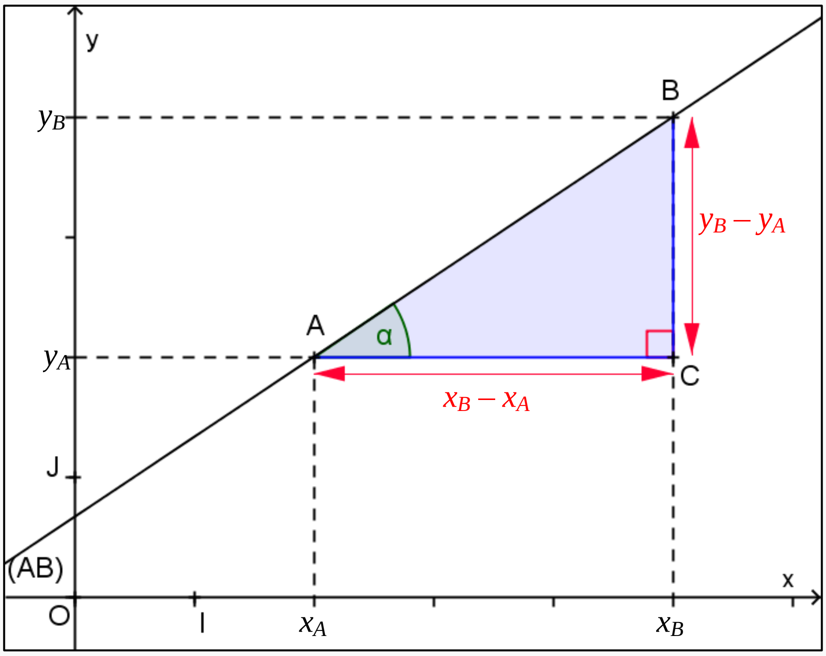
Si $A(x_A ; y_A)$ un point de (d) : $y = mx + p$

alors $m(x_A + 1) + p = m x_A + m + p$

$= (m x_A + p) + m$

$= y_A + m$

donc $M(x_A + 1 ; y_A + m) \in$ (d).



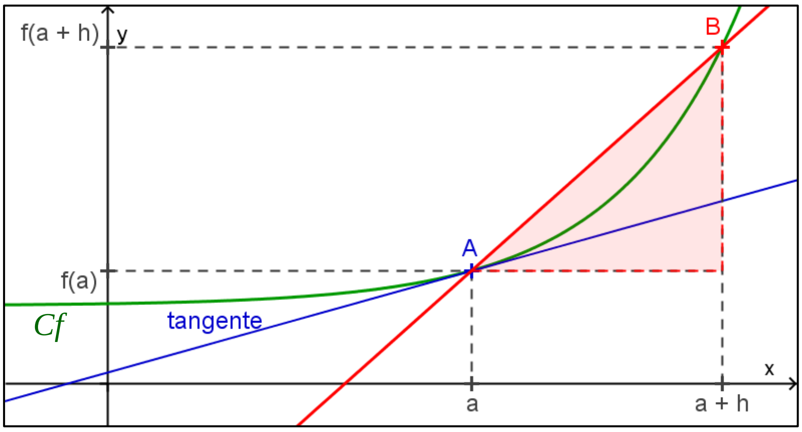
II – Nombre dérivé et tangente

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant *a*, et h un réel différent de zéro.

On appelle **taux d'accroissement** de f entre a et $a + h$ le nombre $T(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

T(h) est le coefficient directeur de la droite (AB).
Il détermine donc la pente de la droite (AB).

Si h se rapproche de 0 alors B se rapproche de A et la droite (AB) tend à se confondre avec la droite appelée tangente sur la figure ci-contre.



Définition 1: On appelle, lorsqu'il existe, **nombre dérivé de la fonction *f* en *a*** le réel noté *f '(a)* tel que :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Remarque : Lorsque *f '(a)* existe, on dit que la **fonction *f* est dérivable en *a***.

Propriété 4: Si f est dérivable en a alors la **tangente à *Cf* au point d'abscisse *a*** est la droite d'équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Équation de la tangente

Si f est dérivable en a alors $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente *(t)* à Cf au point d'abscisse a.
Donc (t) : $y = f'(a)x + p$ avec p réel.

Or $A(a, f(a))$ appartient à (t) donc ses coordonnées vérifient l'équation de (t).

$$f(a) = f'(a)\times a + p \quad \text{donc} \quad p = f(a) - f'(a)\times a$$

On remplace p par sa valeur dans l'équation de *(t)* :

$$y = f'(a)x + p = f'(a)\times x + f(a) - f'(a)\times a = f'(a)(x-a) + f(a)$$

III – Fonction dérivée

1 - Définition de la fonction dérivée

Définition 2: Si une fonction f est dérivable en tout point d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ alors on dit que f est dérivable sur I.
On appelle **fonction dérivée de f** sur I, la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ définie sur I.

Formule algébrique d'une fonction dérivée

Soit la fonction $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ et a un réel fixé.

Pour tout $h \neq 0$, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \dfrac{\cancel{a^2} + 2ah + h^2 - \cancel{a^2}}{h} = \dfrac{\cancel{h}\,(2a+h)}{\cancel{h}} = 2a + h$

Donc si h tend vers 0 alors $2a + h$ tend vers $2a$.
Donc $f'(a) = 2a$.

La fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa fonction dérivée est définie sur $\mathbb{R}$ par $f' : x \mapsto 2x$.

2 - Tableau des fonctions dérivées usuelles

Fonction	**Dérivée**	**Dérivable sur I**
$x \mapsto k$, $k \in \mathbb{R}$	$x \mapsto 0$	I = $\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$	$x \mapsto n\,x^{n-1}$	I = $\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$	I = $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	I = $]0\,;+\infty[$

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Fonction	**Dérivée**
$f+g$	$f'+g'$
$k\,f\ ,\ k \in \mathbb{R}$	$k\,f'$
$f\,g$	$f'g+f\,g'$
$\dfrac{1}{f}$	$\dfrac{-f'}{f^2}$
$\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{f'g-f\,g'}{g^2}$

Calculs de dérivée

• On considère la fonction $f : x \mapsto x^3+2x^2-4x+8$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

On dérive séparément chaque terme de la somme :

Fonction	x^3	x^2	x	8
Dérivée	$3\,x^2$	$2\,x$	1	0

Avec les formules de dérivation relative à $f+g$ et $k\,f\ ,\ k \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$\text{Pour tout réel } x,\ f'(x) = 3x^2+2\times 2x-4\times 1+0 = 3x^2+4x-4$$

• On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+3}{2x-4}$ dérivable sur $]-\infty\ ;\ 2[\ \cup\ ]2\ ;\ +\infty[$.

On pose : $u(x) = x+3$ et $v(x) = 2x-4$

$u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2$

Avec les formules de dérivation relative au quotient de 2 fonctions, on obtient :

$$\text{Pour tout } x\ \mathbb{R},\ ]-\infty\ ;\ 2[\ \cup\ ]2\ ;\ +\infty[,\ f'(x) = \frac{1\times(2x-4)-(x+3)\times 2}{(2x-4)^2} = \frac{\cancel{2x}-4\cancel{-2x}-6}{(2x-4)^2} = \frac{-10}{(2x-4)^2}$$

IV – Signe de la dérivée et sens de variation

1 - Sens de variation

Propriété 5: Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Pour tout $x \in$ I,

si $f'(x) \geq 0$ alors f est croissante sur I.

si $f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante sur I.

si $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.

Sens de variation d'une fonction

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+3}{2x-4}$ dérivable sur]–∞ ; 2[∪]2 ; +∞[telle que :

pour tout x ℝ,]–∞ ; 2[∪]2 ; +∞[, $f'(x) = \dfrac{1 \times (2x-4) - (x+3) \times 2}{(2x-4)^2} = \dfrac{\cancel{2x} - 4 \cancel{-2x} - 6}{(2x-4)^2} = \dfrac{-10}{(2x-4)^2}$.

pour tout x ℝ,]–∞ ; 2[∪]2 ; +∞[, $f'(x) = \dfrac{-10}{(2x-4)^2} \leq 0$

donc la fonction f est décroissante sur]–∞ ; 2[∪]2 ; +∞[.

Propriété 6: Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Pour tout $x \in$ I,

si f est croissante sur I alors $f'(x) \geq 0$.

si f est décroissante sur I alors $f'(x) \leq 0$.

si f est constante sur I alors $f'(x) = 0$.

2 - Extremum d'une fonction

Définition 3: Soit f une fonction définie sur un **intervalle** I et a un réel appartenant à I.

– On dit que $f(a)$ est le **maximum** de la fonction f **sur I**, lorsque :

Pour tout réel x de I, $f(x) \leq f(a)$

– On dit que $f(a)$ est le **minimum** de la fonction f **sur I**, lorsque :

Pour tout réel x de I, $f(x) \geq f(a)$

Propriété 7: Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle ouvert** I et a un réel appartenant à I.

f' s'annule en changeant de signe en a si et seulement si f admet un **extremum** (maximum ou minimum) **local** en a.

Extremum local d'une fonction

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 + 2x^2 - 4x + 8$ dérivable sur ℝ.

Pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 + 2 \times 2x - 4 \times 1 + 0 = 3x^2 + 4x - 4$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 3 \times (-4) = 64 = 8^2$$

$$x_1 = \frac{-4-8}{2 \times 3} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4+8}{2 \times 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

f' est du signe de $a = 3$ à l'extérieur des racines

donc $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty ; -2\right[\cup \left]2 ; +\infty\right[$ et $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left]-2 ; 2\right[$

Tableau de variation

x	$-\infty$		-2		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	16	$\searrow$	$\frac{176}{27}$	$\nearrow$	

f admet un maximum local en -2 égal à 16 et un minimum local en $\frac{2}{3}$ égal à $\frac{176}{27}$.

À l'aide du tableau de variation, on peut obtenir :

– des inégalités : Si $x \geq -2$ alors $f(x) > 0$

– le nombre de solutions d'une équation : l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique sur $\mathbb{R}$.