Chapitre : Dérivation (cours n°1)

I) Taux de variation dûune fonction

I.1) Définition

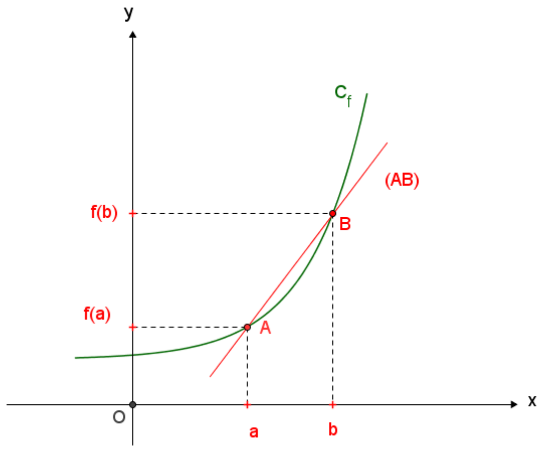
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a et b deux réels appartenant à I (avec $a \neq b$), on appelle **taux de variation** de la fonction f entre a et b le nombre :

$$T = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

I.2) Interprétation graphique

Soit f une fonction quelconque et C_f sa courbe représentative dans un repère

Soit A et B deux points quelconques de C_f qui ont pour abscisses respectives a et b



Le taux de variation de f entre a et b est le **coefficient directeur** (pente) de la droite (AB) car :

$$T = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$ (T comme **T**aux de variation de f entre a et b)

Par un changement de variable $b = a + h$, on obtient :

$$\boxed{T = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

Remarque : la droite (AB) est appelée une sécante à la courbe C_f

I.3) Exemple dôun calcul dôun taux de variation dôune fonction

Soit la fonction $f(x) = x^2$

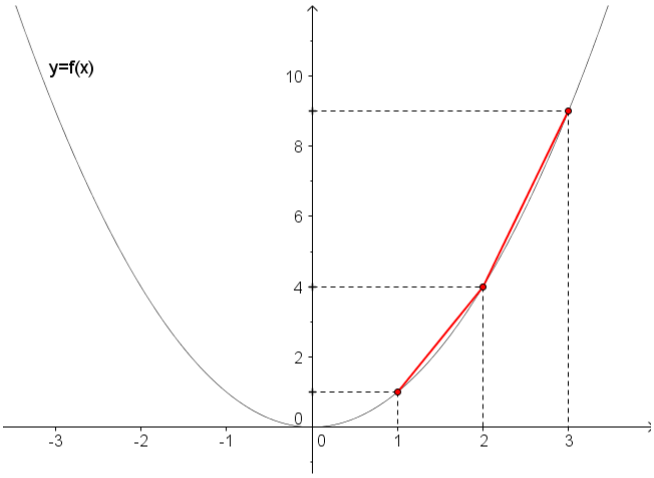
1) Calcul du taux de variation de cette fonction f entre $a=1$ et $b=2$

$$T = \frac{f(2) - f(1)}{2-1} = \frac{2^2 - 1^2}{1} = \frac{4-1}{1} = 3$$

2) Calcul du taux de variation de cette fonction f entre $a=2$ et $b=3$

$$T = \frac{f(3) - f(2)}{3-2} = \frac{3^2 - 2^2}{1} = \frac{9-4}{1} = 5$$

3) Interprétation graphique du calcul de ces 2 taux de variation :



La fonction $f(x) = x^2$ «varie selon une certaine vitesse» sur lôintervalle $[1 ; 2]$ et «à une autre vitesse» sur lôintervalle $[2 ; 3]$
Le taux de variation dôune fonction entre a et b est «la vitesse moyenne» de variation de cette fonction sur lôintervalle $[a ; b]$

4) Calcul du taux de variation de cette fonction $f(x) = x^2$ entre $a=2$ et $b=2+h$

(avec $h \neq 0$) : $T = \dfrac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \dfrac{2^2 + 4h + h^2 - 2^2}{h} = \dfrac{4h + h^2}{h} = \dfrac{h(4+h)}{h} = 4 + h$

Avec cette formule, on peut vérifier que si h = 1 alors le taux de variation entre $a=2$ et $b=2+h$ est $T = 4 + h = 4 + 1 = 5$ et on retrouve bien le résultat du calcul fait dans **2)**

Exercices à faire pour le prochain cours

Exercice n°1

Soit la fonction $f(x) = x^3$ définie sur $\mathbb{R}$ tout entier
Montrer que le taux de variation de cette fonction entre 2 et $2+h$ (avec $h \neq 0$) est

$T = 12 + 6h + h^2$

Indication : il faut développer $(2+h)^3$ *en écrivant* $(2+h)^3 = (2+h)^2(2+h)$

Exercice n°2

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ ($\mathbb{R} \setminus \{0\}$)

Montrer que le taux de variation de cette fonction entre 3 et 3+h (avec $h \neq 0$) est

$T = \dfrac{-1}{3(3+h)}$