# Chapitre : Dérivation (cours n°2)

## I) Taux de variation dôune fonction *(Rappel du cours n°1)*

Le taux de variation dôune fonction $f$ entre *a* et *b*=*a*+*h* est le nombre

$$\boxed{T = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$ (avec $h \neq 0$)

Ce nombre $T$ représente la pente dôune sécante à la courbe $C_f$ Cette sécante est la droite qui passe par les 2 points de $C_f$ qui ont pour coordonnées (a **;** *f*(a)) et (a+h **;** *f*(a+h)).

## II) Limite du taux de variation : nombre dérivé de *f* en *a*

Soit une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ et soit $a \in I$, $h \neq 0$ tel que $a+h \in I$

Soit $T = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ le taux de variation de $f$ *entre a et a+h*

### II.1) Définition du nombre dérivé de f en a

Si le taux de variation de la fonction $f$ entre *a* et *a*+*h* admet une limite finie quand *h* tend vers zéro, c'est-à-dire un nombre réel, alors on dit que la fonction *f* est dérivable en *a*

Cette limite est appelée le nombre dérivée de *f* en *a* et se note $\boxed{f'(a)}$

En langage mathématique, on écrit : $\boxed{f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}}$

### II.2) Exemples

Soit la fonction $f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$

**1)** Calcul du nombre dérivée $f'(2)$

Le taux de variation de la fonction *f* entre *2* et *2*+*h* est :

$$T = \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2-2^2}{h} = \frac{4+4h+h^2-4}{h} = \frac{h(4+h)}{h} = 4+h$$

Comme $\lim\limits_{h \to 0} 4+h = 4$ (on remplace *h* par 0 dans lôexpression de 4+*h*)

On a $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = 4$ donc $f'(2) = 4$

**2)** Calcul du nombre dérivée $f'(a)$ avec *a* un réel quelconque

$$T = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \frac{h(2a+h)}{h} = 2a+h$$

Comme $\lim\limits_{h \to 0} 2a+h = 2a$ (on remplace *h* par 0 dans lôexpression de $T = 2a+h$) On a

$\forall a \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = 2a$ donc $\forall a \in \mathbb{R}$ $f'(a) = 2a$

Remarque **n°1** : Cette formule donne le même résultat pour *a* = 2 que le résultat du calcul fait dans **1)**

Cette formule donne pour *a* = 2 : $f'(2) = 2 \times 2 = 4$

Remarque **n°2** : La fonction qui à $x \mapsto 2x$ est appelée la fonction dérivée de la fonction *f* et se note ***fô*** et on peut écrire $f'(x) = 2x$ *(la fonction* ***fô****est définie sur* $\mathbb{R}$ *car la fonction f est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *)*

## III) Interprétation graphique du nombre dérivé en un point

### Droite tangente à une courbe en un point

Soit $f$ une fonction dérivable en $a$ (cela veut dire que $f'(a)$ existe).
Soit $C_f$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère.
Soit A le point de $C_f$ de coordonnées ( $a$ ; $f(a)$ )
Soit B le point de $C_f$ de coordonnées ( $a+h$ ; $f(a+h)$ ) avec $h \neq 0$

**III.1) Définition** :
La tangente à la courbe $C_f$ au point A( $a$, ; $f(a)$ ) est la droite qui passe par le point A et qui a pour coefficient directeur $f'(a)$

**III.2) «Interprétation géométrique» dõune tangente à une courbe Définition** :
**Faire lõactivité n°2** «*Activité Nombre dérivé et tangente*» disponible sur le site internet.
Cette activité permet de montrer quõau niveau géométrique, la tangente à la courbe $C_f$ au point A peut être considérée comme étant «**la limite des droites (AB) sécantes** à $C_f$ » lorsque $h$ tend vers zéro

### III.3) Equation de la tangente en un point

Lõéquation de la tangente à la courbe $C_f$ au point A dõabscisse $a$ est :

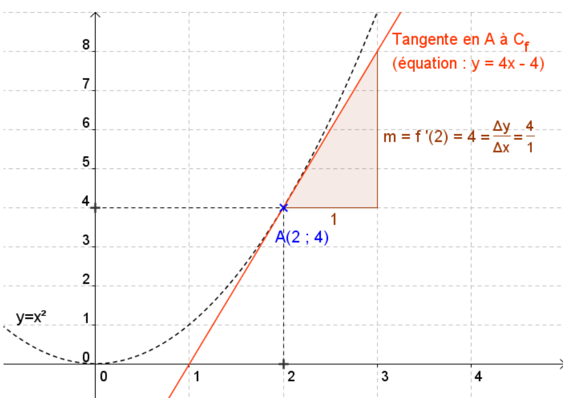
$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

**Démonstration**
Une droite de coefficient directeur (pente) $m$ a pour équation $y = mx + p$
Comme la tangente à $C_f$ en A est la droite qui a pour coefficient directeur $f'(a)$
lõéquation de la tangente à la courbe $C_f$ au point A dõabscisse $a$ est :

$y = f'(a)x + p$ ***(E)***
Pour calculer $p$, utilisons le fait que cette droite passe par le point A ($a$ ; $f$(a))
On obtient : $f(a) = f'(a)a + p$ donc $p = f(a) - f'(a)a$

En remplaçant $p$ par sa valeur dans lõéquation ***(E)***, on obtient lõéquation suivante :
$$y = f'(a)x + p = f'(a)x + \left(f(a) - f'(a)a\right) = f'(a)x + f(a) - f'(a)a = f'(a)\left(x-a\right) + f(a)$$

**Exemple n°1** : Traçons dans un repère du plan la courbe $C_f$ de la fonction $f(x) = x^2$ pour $x \in \left[-1;+3\right]$ et traçons la tangente à la courbe $C_f$ au point A dõabscisse 2
On a $f(2) = 2^2 = 4$ et on sait que $f'(2) = 4$




Lõéquation de la « tangente » à la courbe $C_f$ en A (2 ;4) est :

$$y = 4\left(x-2\right) + 4 \Leftrightarrow y = 4x - 4$$

## III.3) Exemples

**Exemple n°1**

Soit la fonction $f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$

Cherchons lôéquation de la tangente T à $C_f$ au point B dôabscisse 3

On a $f(3) = 3^2 = 9$ et $f'(3) = 2 \times 3 = 6$ donc lôéquation de T est $y = 6(x-3) + 9 = 6x-9$

**Exemple n°2**

Soit la fonction $f(x) = x^3$ définie sur $\mathbb{R}$

Cherchons lôéquation de la tangente T à $C_f$ au point C dôabscisse 2

On a $f(2) = 2^3 = 8$

Calculons $f'(2)$ : on sait que le taux de variation de $f$ entre 2 et 2+$h$ *est* $T = 12 + 6h + h^2$

(*voir correction de lôexercice n°1, ci-dessous*)

Comme $\lim\limits_{h \to 0} 12 + 6h + h^2 = 12$ (on remplace $h$ par 0 dans lôexpression $T = 12 + 6h + h^2$ )

on a donc $f'(2) = 12$

Lôéquation de T est donc $y = 12(x-2) + 8 = 12x-16$

## *Correction des 2 exercices du cours n°1*

### Exercice n°1 :

Soit la fonction $f(x) = x^3$ définie sur $\mathbb{R}$ tout entier

Montrer que le taux de variation de cette fonction entre *2* et *2+h* (avec $h \neq 0$ ) est $T = 12 + 6h + h^2$

Indication : il faut développer $(2+h)^3$ en écrivant $(2+h)^3 = (2+h)^2(2+h)$

$$(2+h)^3 = (2+h)^2(2+h) = (2^2 + 4h + h^2)(2+h) = 2^3 + 2^2h + 8h + 4h^2 + 2h^2 + h^3 = 8 + 12h + 6h^2 + h^3$$

$$T = \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{(2+h)^3 - 2^3}{h} = \frac{(8 + 12h + 6h^2 + h^3) - 8}{h} = \frac{12h + 6h^2 + h^3}{h} = \frac{h(12 + 6h + h^2)}{h} = 12 + 6h + h^2$$

### Exercice n°2

Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ ($\mathbb{R} \backslash \{0\}$)

Montrer que le taux de variation de cette fonction entre 3 et 3+ $h$ (avec $h \neq 0$ ) est $T = \frac{-1}{3(3+h)}$

$$T = \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{\frac{1}{3+h} - \frac{1}{3}}{h} = \frac{\frac{3}{3(3+h)} - \frac{(3+h)}{3(3+h)}}{h} = \frac{-h}{3(3+h)h} = \frac{-1}{3(3+h)}$$

## *Exercices à faire pour le prochain cours*

### Exercice n°3

Soit $C_f$ la courbe représentative dûne fonction $f$ quelconque dans un repère du plan. On suppose que la fonction $f$ est dérivable en $x_0$

**Question :** Après avoir lu et compris le cours, écrire et retrouver sur une feuille de brouillon lôéquation de la tangente à la courbe $C_f$ en un point dôabscisse $x_0$

### Exercice n°4

Soit $f$ une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$ *et* $b \neq 0$

Ecrire lôéquation de la tangente à la courbe représentative de cette fonction en un point dôabscisse $x_0$

Indication : il faut calculer $f'(x_0)$

Commenter le résultat obtenu