

Chapitre : Dérivation (cours n°3)

I) Taux de variation d'une fonction (Rappel du cours n°1)

Le taux de variation d'une fonction f entre a et $b = a+h$ est le nombre T tel que

$$T = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{avec } h \neq 0$$

II) Nombre dérivé de f en a (Rappel du cours n°2)

$$\text{Si } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ existe ALORS on POSE } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

On dit que la fonction f est dérivable en a

III) Equation de la tangente à une courbe en un point (Rappel du cours n°2)

L'équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) \quad (\text{si } f \text{ est dérivable en } a)$$

IV) Notion de fonction dérivée

Si une fonction f est dérivable en tout nombre a appartenant à un intervalle I :

on peut définir une nouvelle fonction qui est notée f' et qui est appelée la fonction dérivée de f

La fonction telle que $\forall x \in I \quad x \mapsto f'(x)$ est appelée la fonction dérivée de f et est notée f'

L'étude du signe de la fonction f' permet une étude des variations (croissance ou décroissance) de la fonction f sur des intervalles I (définis sur $\mathbb{R}$) et permet de tracer la courbe représentative C_f

Propriétés :

- Si $f'(x_0) > 0$ alors f est strictement croissante sur un voisinage de x_0
- Si $f'(x_0) < 0$ alors f est strictement décroissante sur un voisinage de x_0
- Si $f'(x_0) = 0$ alors C_f admet une tangente horizontale au point d'abscisse x_0

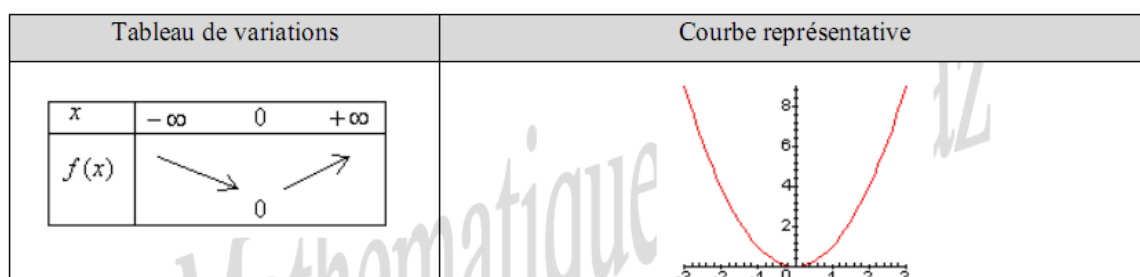
1^{er} exemple :

$f(x) = x^2$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x$

Si $x < 0$ comme $2x < 0$ on a $f'(x) < 0$: la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$

Si $x > 0$ comme $2x > 0$ on a $f'(x) > 0$: la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$

Pour $x = 0$ on a $f'(0) = 0$: C_f a une tangente horizontale au point d'abscisse 0

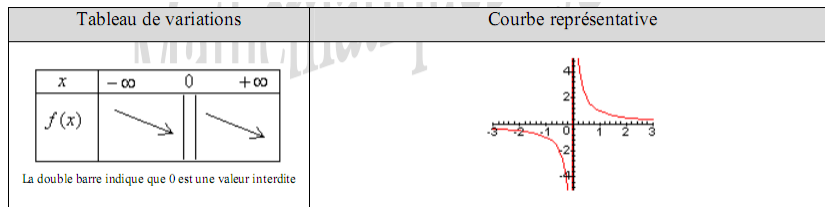


2^{ème} exemple :

$f(x) = \frac{1}{x}$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^* (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ et on a $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$ (voir tableau ci-dessous)

On a $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{-1}{x^2} < 0$ donc $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}^{-*}$ et sur $\mathbb{R}^{+*}$

La fonction f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$ et sur $\mathbb{R}^{+*}$

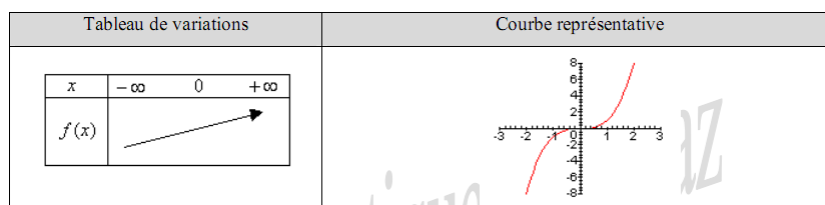
**3^{ème} exemple :**

$f(x) = x^3$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2$ (voir tableau ci-dessous)

On a $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad 3x^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}^{-*}$ et sur $\mathbb{R}^{+*}$

La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^{-*}$ et sur $\mathbb{R}^{+*}$

Pour $x = 0$ on a $f'(0) = 0$: C_f a une tangente horizontale au point d'abscisse 0

**V) Fonctions dérivées des fonctions usuelles** (D_f est le domaine de définition de la fonction f

et $D_{f'}$ est le domaine de définition de la fonction f')

Généralement $D_{f'}$ est appelé le domaine de dérivabilité de la fonction f)

fonction f définie par	D_f	fonction dérivée f' définie par	$D_{f'}$
$f(x) = k$ (avec $k \in \mathbb{R}$)	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx + p$ (avec $m \neq 0$)	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$)	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = (-1)x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = (-2)x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\mathbb{R}^+$	$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$f'(x) = \frac{-1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = \frac{-1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{2x^{\frac{3}{2}}}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$f(x) = x^q$ (avec $q \in \mathbb{Q}$)	$\mathbb{R}^{+*}$	$f'(x) = qx^{q-1}$	$\mathbb{R}^{+*}$

VI) Opérations sur les fonctions dérivables

Soit **u et v 2 fonctions dérivables** en $x_0 \in \mathbb{R}$ **alors** la fonction la fonction **$u + v$** est dérivable en x_0

Les fonctions **ku et $u \times v$** sont dérivables en x_0 **ET** la fonction **$\frac{1}{u}$** est dérivable en x_0 si $u(x_0) \neq 0$

	Valeur de la fonction f en x_0	Valeur de la fonction dérivée de f en x_0	Opération
	$f(x_0) = ku(x_0)$ (avec $k \in \mathbb{R}$)	$f'(x_0) = ku'(x_0)$	$(ku)' = ku'$
	$f(x_0) = (u+v)(x_0) = u(x_0) + v(x_0)$	$f'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0)$	$(u+v)' = u' + v'$
(I)	$f(x_0) = (u \times v)(x_0) = u(x_0) \times v(x_0)$	$f'(x_0) = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0)$	$(uv)' = u'v + uv'$
(*)	$f(x_0) = \left(\frac{u}{v}\right)(x_0) = \frac{u(x_0)}{v(x_0)}$ avec $v(x_0) \neq 0$	$f'(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
(II)	$f(x_0) = \frac{1}{u(x_0)}$ avec $u(x_0) \neq 0$	$f'(x_0) = \frac{-u'(x_0)}{u^2(x_0)}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$

(*) Démontrons la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ à partir des 2 formules **(I)** et **(II)**

On peut écrire $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$ et en appliquant les formules **(I)** et **(II)** on a :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \times \frac{1}{v}\right)' = u \left(\frac{1}{v}\right)' + u' \left(\frac{1}{v}\right) = u \left(\frac{-v'}{v^2}\right) + u' \left(\frac{1}{v}\right) = \frac{-uv'}{v^2} + \frac{u'}{v} = \frac{-uv'}{v^2} + \frac{u'v}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Exemple:

$$f(x) = \frac{x^3}{18} - \frac{x^2}{4} + 4 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 4 \quad \text{Cette fonction } f \text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ et est dérivable sur } \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 4\right)' = \frac{1}{18}(x^3)' - \frac{1}{4}(x^2)' + (4)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{18}(3x^2) - \frac{1}{4}(2x) + 0 = \frac{x^2}{6} - \frac{x}{2} = \left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{3} - 1\right)$$

Il faut faire une étude du signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x

pour dessiner le tableau variation de la fonction f . Un tableau de signe permet de conclure que :

- $f'(x) < 0$ sur $]0; 3[$
- $f'(x) > 0$ sur $] -\infty; 0[\cup]3; +\infty[$

On a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$			$+\infty$

La fonction f est strictement croissante sur $] -\infty; 0[$ (f est également strictement croissante sur $]3; +\infty[$)

La fonction f est strictement décroissante sur $]0; 3[$

Correction de l'exercice n°4 (du cours n°2)

Exercice n°4

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$

Ecrire l'équation de la tangente à la courbe représentative de cette fonction en un point d'abscisse x_0

Indication : il faut calculer $f'(x_0)$

Commenter le résultat obtenu

SOLUTION : Pour calculer $f'(x_0)$ il est faut calculer le taux de variation T de f entre

$x = x_0$ et $x = x_0 + h$ puis calculer $\lim_{h \rightarrow 0} T$

$$T = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{[a(x_0 + h) + b] - [ax_0 + b]}{h} = \frac{ax_0 + ah + b - ax_0 - b}{h} = \frac{ah}{h} = a$$

Comme $\lim_{h \rightarrow 0} T = \lim_{h \rightarrow 0} a = a$ on peut conclure que la fonction f est dérivable en $x = x_0$

et que $f'(x_0) = a$

L'équation de la tangente est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

c'est-à-dire $y = a(x - x_0) + (ax_0 + b) \Leftrightarrow y = ax + b$

Conclusion : La tangente en tout point de C_f de coordonnées $(x_0 ; f(x_0) = ax_0 + b)$

est la même droite que C_f (représentation graphique de cette fonction affine dans un repère du plan)

Exercices à faire pour le prochain cours

Exercice n°5

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3$ définie sur $\mathbb{R}$

Retrouver l'expression de la fonction f' : c'est-à-dire $f'(x) = 3x^2$

en écrivant que $f(x) = x \times x^2$ et en appliquant la formule (I)

Exercice n°6

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$

Démontrer que f n'est pas dérivable en 0 et dessiner le tableau de variation de la fonction f

ET tracer la courbe représentative de cette fonction pour $x \in [0, 1]$