Chapitre : Dérivation

Exemple dôune fonction non dérivable

Soit la fonction $f(x) = |x|$ définie sur $\mathbb{R}$

Montrons que la fonction f nôest pas dérivable en $x = 0$

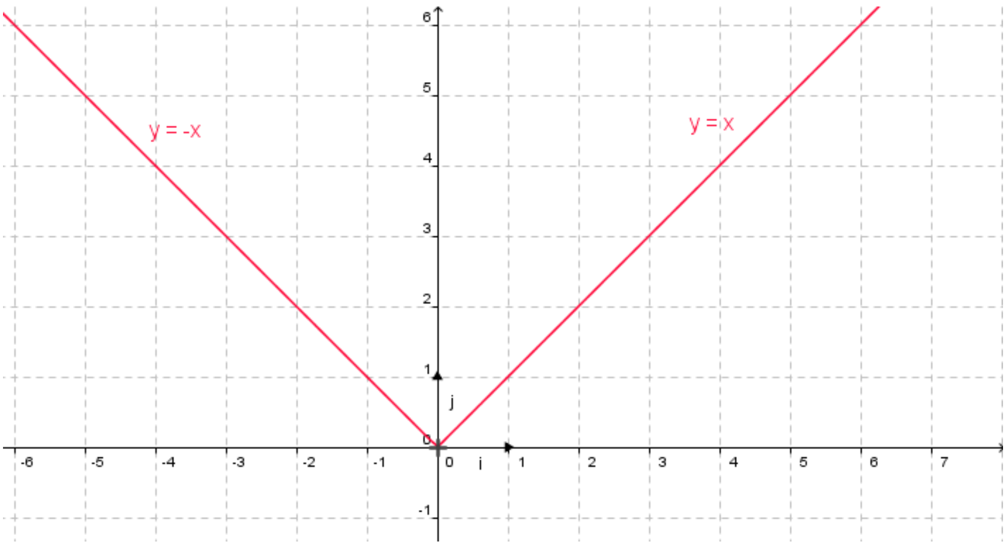
Dôaprès le cours sur la dérivation dôune fonction, si f est dérivable en $x = 0$ on doit avoir

$$\boxed{f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}}$$

Dans un premier temps, traçons la courbe représentative de cette fonction dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Pour tracer cette courbe C_f il faut étudier la fonction f sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$

- Si $x \geq 0$ alors $f(x) = x$ **car** $|x| = x$
- Si $x \leq 0$ alors $f(x) = -x$ **car** $|x| = -x$ (car le nombre $-x$ est positif)

La représentation graphique C_f de cette fonction dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan est :



Montrons que cette fonction nôest pas dérivable en $x = 0$
(le point de C_f qui est en $x = 0$ est le point O origine du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ car $f(0) = |0| = 0$)

Montrons que f nôest pas dérivable en $x = 0$ c'est-à-dire que $f'(0) \neq \lim_{h \to 0} T_f$ avec T_f taux de variation de la fonction f entre $x_1 = 0$ et $x_2 = 0 + h$: $T_f = \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h}$ et $h \neq 0$

Calculons T_f le taux de variation de f entre $x_1 = 0$ et $x_2 = 0 + h$

$$T_f = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(0+h) - f(0)}{(0+h) - h} = \frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h}$$

Ce taux de variation T_f entre $x_1 = 0$ et $x_2 = 0 + h$ dépend du signe de h

1ier cas

Si $h \geq 0$ alors $|h| = h$

On a $T_f = \frac{|h|}{h} = \frac{h}{h} = \mathbf{1}$ (on est à **droite du point O,** c'est-à-dire sur l'intervalle **$[0,h]$** $\in \mathbb{R}^+$)

en langage mathématique, on écrit $\lim\limits_{h \to 0^+} T_f = \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 1$

2ième cas

Si $h \leq 0$ alors $|h| = -h$ (car h est négatif)

On a $T_f = \frac{|h|}{h} = \frac{-h}{h} = -\mathbf{1}$ (on est à **gauche du point O**, c'est-à-dire sur l'intervalle **$[-h,0]$** $\in \mathbb{R}^-$)

en langage mathématique, on écrit $\lim\limits_{h \to 0^-} T_f = \lim\limits_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = -1$

CONCLUSION

Comme $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \neq \lim\limits_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$

en langage mathématique, on dit que $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$ **n'existe pas**

et donc $f'(0)$ **n'existe pas** pour cette fonction

Cette fonction f n'est donc pas dérivable en x = 0

CONCLUSION

la fonction f définie par $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle n'est pas dérivable en $x = 0$

REMARQUES

- Cette fonction est « communément » appelée « la fonction absolue »

- Cette fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ (ou sur $\mathbb{R}^-$)