Calcul de la fonction dérivée de la fonction $f(x)=\frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ (fonction INVERSE)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par lõexpression : $f(x)=\frac{1}{x}$

Montrons que cette fonction **<u>est dérivable</u>** sur $\mathbb{R}^*$ et que **sa fonction dérivée** est la fonction : $x \mapsto \frac{-1}{x^2}$

<u>DEMONSTRATION</u>

Calculons le taux de variation T_f de cette fonction f entre $x=x_0$ et $x=x_0+h$

avec $x_0 \neq 0$ et h tel que $x_0+h \neq 0$

$$T_f=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0}=\frac{\frac{1}{x_0+h}-\frac{1}{x_0}}{(x_0+h)-x_0}=\frac{\frac{1}{x_0+h}-\frac{1}{x_0}}{h}=\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x_0+h}-\frac{1}{x_0}\right)$$

$$T_f=\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x_0+h}-\frac{1}{x_0}\right)=\frac{1}{h}\left(\frac{x_0}{x_0(x_0+h)}-\frac{(x_0+h)}{(x_0+h)x_0}\right)=\frac{1}{h}\left(\frac{x_0-(x_0+h)}{x_0(x_0+h)}\right)=\frac{1}{h}\left(\frac{-h}{x_0(x_0+h)}\right)=\frac{-1}{x_0(x_0+h)}$$

Dõaprès le cours comme $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0}$ **<u>existe</u>**

donc on peut conclure que la fonction f est dérivable en x_0

Son nombre dérivée en x_0 est le nombre $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0}$ **que lõon note $f'(x_0)$**

Comme $\lim\limits_{h\to 0}\frac{-1}{x_0(x_0+h)}=\frac{-1}{x_0^2}$ pour tout $x_0 \neq 0$ on a donc $\boxed{f'(x_0)=\frac{-1}{x_0^2} \text{ pour tout } x_0 \neq 0}$

CONCLUSION

- La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ **est dérivable** sur $\mathbb{R}^*$ (cõest-à-dire sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$)
- Cette fonction est « *communément* » appelée « la **fonction inverse** »
- Sa fonction dérivée est la fonction f**ô** définie sur $\mathbb{R}^*$ par lõexpression : $f'(x)=\frac{-1}{x^2}$