

1^{ère} ES, Vendredi 15 janvier 2010

Exercice sur le taux de variation d'une fonction

Un personne lâche une bille d'une hauteur de 45m (l'unité de longueur est le mètre et l'unité de temps est la seconde). **Le but de l'exercice** est de calculer la vitesse moyenne de cette bille entre deux instants (avant que la bille ne touche le sol). On suppose que la distance $d(t)$ parcourue par la bille à l'instant t est

la fonction $d(t) = 5t^2$ (modélisation d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré en prenant une valeur approchée de **la constante de la pesanteur** : $g \approx 10$)

Rappel : Une vitesse moyenne se calcule par la formule $v = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{durée du trajet}}$ (cours de physique)

Question n°1 : Compléter le tableau de valeurs :

t (secondes)	0s	1s	2s	3s
distance (mètres) $d(t) = 5t^2$	0m			
hauteur (mètres)	45m			

Question n°2 : Calculer la vitesse moyenne de la bille sur l'intervalle $[1 ; 3]$

Indication : la vitesse moyenne de la bille sur l'intervalle $[t_1 ; t_2]$ se calcule comme le taux de variation

de la fonction $d(t)$ entre ces deux instants t_1 et t_2 ; c'est-à-dire $T = \frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1}$

Question n°3 : Calculer la vitesse moyenne de la bille sur les intervalles :

$[1 ; 2]$; $[1 ; 1,5]$; $[1 ; 1,25]$; $[1 ; 1,1]$; $[1 ; 1,01]$

Question n°4 : Donner en fonction de h la vitesse moyenne sur l'intervalle $[1 ; 1 + h]$ et utiliser cette expression pour calculer la vitesse moyenne sur l'intervalle $[1 ; 1,001]$

Question n°5 : Que peut on conjecturer quand le nombre h est de plus en plus petit?

Question n°6 : Calculer la vitesse instantanée de la bille à l'instant $t = 1$ s (la vitesse instantanée à l'instant $t = 1$ s est la vitesse moyenne entre 1 et $1+h$ quand h est très très petit : en mathématiques on doit calculer **la limite** de la vitesse moyenne entre 1 et $1+h$ **quand h tend vers 0**).

Correction de l'exercice sur le taux de variation d'une fonction

$$T = \frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Question n°1 : Compléter le tableau de valeurs :

t (secondes)	0s	1s	2s	3s
distance (mètres) $d(t) = 5t^2$	0m	5m	20m	45m
hauteur (mètres)	45m	40m	25m	0m

Question n°3 : Calculer la vitesse moyenne de la bille sur les intervalles :

[1 ; 2] ; [1 ; 1,5] ; [1 ; 1,25] ; [1 ; 1,1] ; [1 ; 1,01]

Intervalle

$$[1 ; 3] \quad T = \frac{5 \times 3^2 - 5 \times 1^2}{3 - 1} = \frac{45 - 5}{2} = 20 \text{ donc } v = 20 \text{ m / s}$$

$$[1 ; 2] \quad T = \frac{5 \times 2^2 - 5 \times 1^2}{2 - 1} = \frac{20 - 5}{1} = 15 \text{ donc } v = 15 \text{ m / s}$$

$$[1 ; 1,5] \quad T = \frac{5 \times 1,5^2 - 5 \times 1^2}{1,5 - 1} = \frac{11,25 - 5}{0,5} = \frac{6,25}{0,5} = 12,5 \text{ donc } v = 12,5 \text{ m / s}$$

$$[1 ; 1,25] \quad T = \frac{5 \times 1,25^2 - 5 \times 1^2}{1,25 - 1} = \frac{7,8125 - 5}{0,25} = \frac{2,8125}{0,25} = 11,25 \text{ donc } v = 11,25 \text{ m / s}$$

$$[1 ; 1,1] \quad T = \frac{5 \times 1,1^2 - 5 \times 1^2}{1,1 - 1} = \frac{6,05 - 5}{0,1} = \frac{1,05}{0,1} = 10,5 \text{ donc } v = 10,5 \text{ m / s}$$

$$[1 ; 1,01] \quad T = \frac{5 \times 1,01^2 - 5 \times 1^2}{1,01 - 1} = \frac{5,1005 - 5}{0,01} = \frac{0,1005}{0,01} = 10,05 \text{ donc } v = 10,05 \text{ m / s}$$

$$[1 ; 1,001] \quad T = \frac{5 \times 1,001^2 - 5 \times 1^2}{1,001 - 1} = \frac{5,010005 - 5}{0,001} = \frac{0,010005}{0,001} = 10,005 \text{ donc}$$

$$v = 10,005 \text{ m / s}$$

Question n°4 : Donner en fonction de h la vitesse moyenne sur l'intervalle $[1 ; 1 + h]$ et utiliser cette expression pour calculer la vitesse moyenne sur l'intervalle $[1 ; 1,001]$

$$T = \frac{5 \times (1 + h)^2 - 5 \times 1^2}{h} = \frac{10h + 5h^2}{h} = 10 + 5h$$

$$[1 ; 1,001] \quad T = 10 + 5 \times 0,001 = 10,005 \text{ donc } v = 10,005 \text{ m / s}$$

Question n°6 : quand $h \rightarrow 0$ on a $10 + 5h \rightarrow 10$ donc la vitesse instantanée de la bille à l'instant $t = 1s$ est $v_{t=1s} = 10 \text{ m / s}$