TES$_1$: DEVOIR SURVEILLÉ N°1 (2 heures)

Exercice 1 (4 points)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (1+x)^3 + x$$

1. Calculer la dérivée g' de g et préciser son signe. En déduire le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-1 ; 0]$.
3. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

Exercice 2 (12 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par :

$$f(x) = -2x + 1 - \frac{8}{x-3}$$

On note C_f sa représentation graphique dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. La courbe C_f admet-elle une asymptote horizontale ?
2. Étudier les limites de f en 3^- et en 3^+. La courbe C_f admet-elle une asymptote verticale ?
3. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = -2x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe C_f en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. Calculer la dérivée f' de f. Démontrer que : $f'(x) = -\dfrac{2(x-5)(x-1)}{(x-3)^2}$.
5. En déduire le tableau de variation de f.
6. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse $x_0 = 2$.
7. Tracer soigneusement, sur une feuille séparée, Δ, T et C_f.

   Unités graphiques :
   - Axe des abscisses : gradué de -2 à 7 avec 1cm par unité.
   - Axe des ordonnées : gradué de -24 à 12 avec 1cm pour 4 unités.

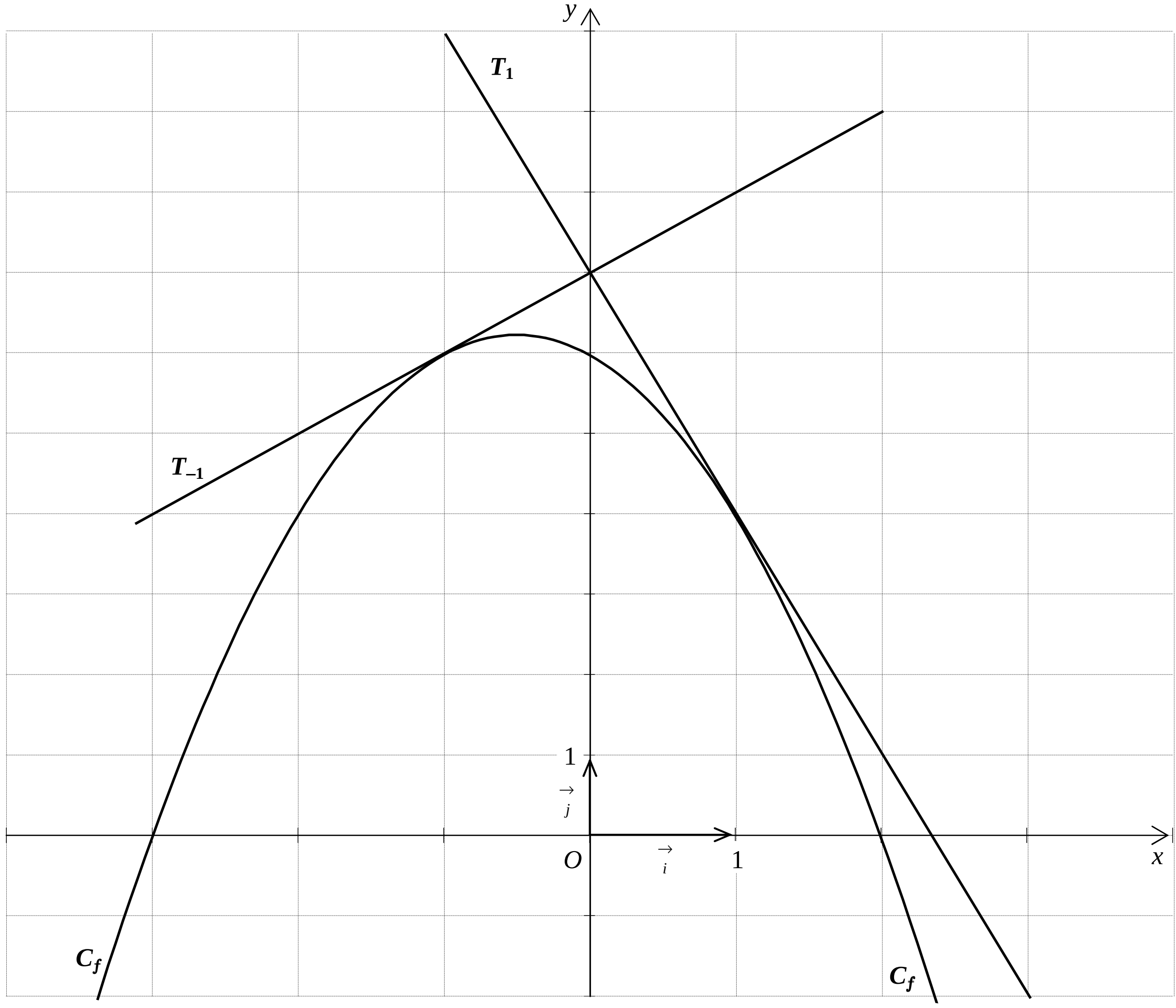
Exercice 3 (4 points)

On dispose d'une courbe C_f représentant une fonction f et de deux de ses tangentes T_1 et T_{-1}.

(Voir graphique ci-contre)

On sait que la fonction f est de la forme : $f(x) = a\,x^2 + bx + c$. (C_f est une parabole)

1. Par lecture graphique, donner la valeur de $f(0)$. En déduire la valeur de c.
2. Exprimer $f'(x)$ en fonction de a et b.
3. Par lecture graphique, donner la valeur des nombres $f'(1)$ et $f'(-1)$. En déduire la valeur de a et b.
4. Par lecture graphique, résoudre l'équation $f(x) = 0$. Retrouver ce résultat par calcul.



y
T_1
T_{-1}
1
$\vec{j}$
O
$\vec{i}$
1
x
C_f
C_f