

TES₁ : DEVOIR SURVEILLÉ N°1 : CORRIGÉ

Exercice 1 (4 points)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (1+x)^3 + x$

1. La fonction g est de la forme : $g = u^n + v$ avec : $u(x) = 1+x$; $n = 3$ et $v(x) = x$.

Donc $g' = nu' u^{n-1} + v'$. Ce qui donne : $g'(x) = 3(1+x)^2 + 1$.

Inutile de développer, on a immédiatement : $g'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. (Un carré auquel on ajoute 1 donne une quantité strictement positive)

La fonction g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. C'est une question classique. Vérifions les trois conditions du théorème de bijection :

* La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc a fortiori g est dérivable sur $[-1 ; 0]$.

* La fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc a fortiori g est strictement croissante sur $[-1 ; 0]$.

* On a : $g(-1) = -1 < 0$ et $g(0) = 1 > 0$. Le réel $\lambda = 0$ est donc bien compris entre $g(-1)$ et $g(0)$.

D'après le théorème de bijection, on en déduit que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-1 ; 0]$:

x	$-\infty$	-1	α	0	$+\infty$
signe de la dérivée g'			+		
variations de g		-1	0	1	

3. Encadrement de α d'amplitude 10^{-1} à l'aide d'un petit tableau de valeurs :

x	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1
$g(x)$	-0,899	-0,792	-0,673	-0,536	-0,375	-0,184	0,043	0,312	0,629

Les valeurs de $g(x)$ sont arrondies à 10^{-3} .

On en déduit : $-0,4 < \alpha < -0,3$

Exercice 2 (12 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par : $f(x) = -2x + 1 - \frac{8}{x-3}$

1. Limite de f en $-\infty$. On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x + 1) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{8}{x-3} = 0 \text{ puisque } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-3) = -\infty. \end{array} \right.$$

Donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Limite de f en $+\infty$. On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x + 1) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{8}{x-3} = 0 \text{ puisque } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-3) = +\infty. \end{array} \right.$$

Donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Comme les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ **ne sont pas finies**, la courbe C_f n'admet donc pas d'asymptote horizontale en $+\infty$, ni en $-\infty$.

2. Limite de f en 3^- . On a :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} (-2x + 1) = -5 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} -\frac{8}{x-3} = +\infty \text{ puisque } \lim_{x \rightarrow 3^-} (x-3) = 0^- \end{cases}$$

Donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$.

Limite de f en 3^+ . On a :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} (-2x + 1) = -5 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} -\frac{8}{x-3} = -\infty \text{ puisque } \lim_{x \rightarrow 3^+} (x-3) = 0^+ \end{cases}$$

Donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$.

Comme les limites de f en 3^+ et 3^- sont **infinies**, on en déduit que la courbe C_f admet une asymptote verticale D d'équation $x = 3$.

3. Étudions la différence $f(x) - (-2x + 1)$. ("Écart vertical" entre la courbe C_f et la droite Δ en l'abscisse x).

$$f(x) - (-2x + 1) = -2x + 1 - \frac{8}{x-3} - (-2x + 1) = -\frac{8}{x-3}$$

Cet "écart vertical" tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{8}{x-3} = 0$

La courbe C_f admet donc une asymptote oblique Δ d'équation $y = -2x + 1$ en $+\infty$.

On a le même résultat en $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{8}{x-3} = 0$

La courbe C_f admet donc également une asymptote oblique Δ d'équation $y = -2x + 1$ en $-\infty$.

4. Calcul de la dérivée f' de la fonction f :

La fonction f est de la forme : $f = u - 8 \times \frac{1}{v}$ où u et v sont les fonctions définies par $\begin{cases} u(x) = -2x + 1 \\ v(x) = x - 3 \end{cases}$.

Donc $f' = u' - 8 \times \left(-\frac{v'}{v^2}\right) = u' + 8 \times \frac{v'}{v^2}$, ce qui donne : $f'(x) = -2 + \frac{8}{(x-3)^2}$.

En réduisant au même dénominateur :

$$f'(x) = \frac{8 - 2(x-3)^2}{(x-3)^2} = \frac{8 - 2(x^2 - 6x + 9)}{(x-3)^2} = \frac{-2x^2 + 12x - 10}{(x-3)^2}$$

Par ailleurs, on a : $-2(x-5)(x-1) = (10 - 2x)(x-1) = -2x^2 + 12x - 10$. Donc : $f'(x) = -\frac{2(x-5)(x-1)}{(x-3)^2}$

5. On en déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$	
signe de -2	—	—	—	—	—	
signe de $(x-5)$	—	—	—	0	+	
signe de $(x-1)$	—	0	+	+	+	
signe de $(x-3)^2$	+	+	0	+	+	
signe de la dérivée f'	—	0	+	+	0	—
variations de f	$+\infty$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$-\infty$	$-\infty$

La fonction f admet un maximum relatif en 5 : $f(5) = -13$.

Justification des signes :

$$x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$$

$$x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

Un carré est positif ou nul

Ne pas oublier de compléter le tableau de variation avec les **valeurs des limites et des éventuels extremums**

La fonction f admet un minimum relatif en 1 : $f(1) = 3$.

6. L'équation de la tangente T au point d'abscisse 2 est donnée par la formule :

$$T_2 : y = f(2) + f'(2)(x - 2)$$

Or, $f(2) = 5$ et $f'(2) = 6$.

D'où :

$$T_2 : y = 6x - 7$$

La formule générale est :
 $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

7. **Veuillez refaire soigneusement le graphique chez vous puis me le rendre pour le Jeudi 4 Octobre 2001**

En tenant compte des conseils suivants :

- Respecter les unités graphiques.
- Tracer les deux asymptotes (l'oblique Δ et la verticale)
- Tracer la tangente T .
- Pour tracer C_f , soyez généreux et calculez de nombreuses valeurs avec la calculatrice (Vous pouvez utiliser le menu "TABLE"). Marquez d'une croix légère au crayon tous les points calculés. Lorsque vous dessinez C_f , veillez à bien représenter le comportement asymptotique (C_f doit s'approcher de ses asymptotes). Veillez également à ce que la droite T soit bien tangente à C_f au point d'abscisse 2.
- Représenter par une double flèche les tangentes horizontales à C_f . (Les coordonnées des points correspondants sont visibles dans le tableau de variation)
- Enfin, utilisez des couleurs différentes !

Exercice 3 (4 points)

On dispose d'une courbe C_f représentant une fonction f et de deux de ses tangentes T_1 et T_{-1} .

(Voir graphique ci-contre)

On sait que la fonction f est de la forme : $f(x) = ax^2 + bx + c$. (C_f est une parabole)

1. $f(0) = 6$. Par ailleurs, $f(0) = c$. Donc $c = 6$.
2. $f'(x) = 2ax + b$.
3. $f'(1) =$ coefficient directeur de la tangente $T_1 = -3$. $f'(-1) =$ coefficient directeur de la tangente $T_{-1} = 1$.

Par ailleurs, d'après la question 2, on a : $f'(1) = 2a + b$ et $f'(-1) = -2a + b$.

En résolvant le petit système $\begin{cases} 2a + b = -3 \\ -2a + b = 1 \end{cases}$, on trouve facilement $a = -1$ et $b = -1$.

On a donc déterminé la fonction $f : f(x) = -x^2 - x + 6$.

4. Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de C_f avec l'axe (Ox) .

Graphiquement, on trouve deux solutions : $x_1 = -3$ et $x_2 = 2$. Donc $S = \{-3 ; 2\}$.

Pour retrouver ce résultat par calcul, on résout l'équation $-x^2 - x + 6 = 0$. Allez, tout le monde sait le faire, je vais me coucher !