FONCTIONS - GENERALITES

1) Notion de fonction. Plusieurs définitions

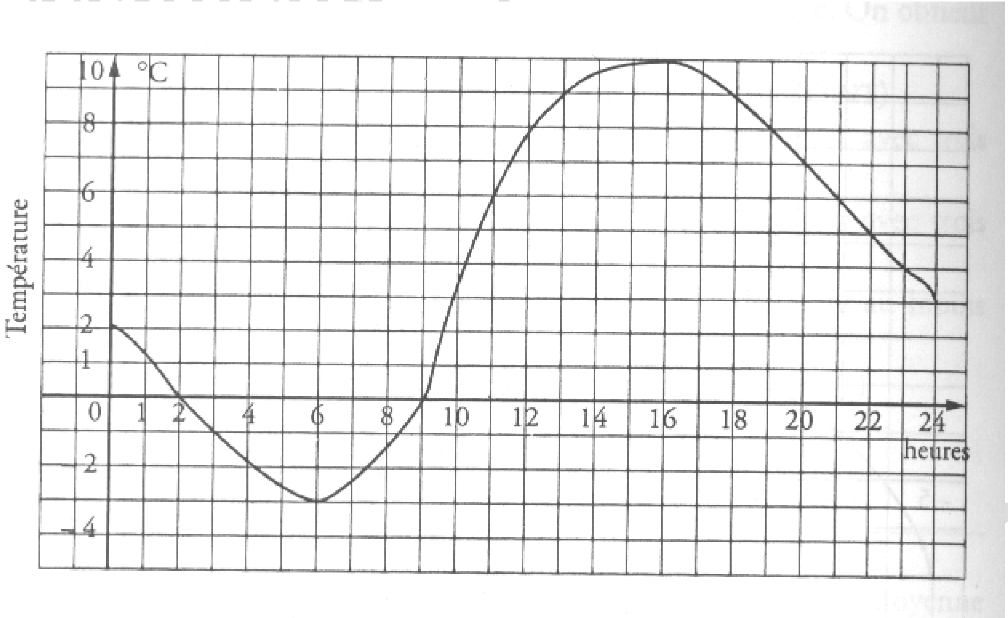
Définition :

Définir une fonction *f*, c'est associer à tout nombre réel noté x , pris dans un certain ensemble, appelé **ensemble de définition** de la fonction *f*, un unique nombre réel, noté $f(x)$ (lire « *f* de *x* », appelé **image de *x* par *f***

Cette association peut s'effectuer au moyen :

a) d'un graphique

Par exemple, le graphique suivant donne le relevé des températures extérieures sur une journée **en fonction** de l'heure.



On lit en abscisse la **variable** (l'heure). Elle appartient à l'ensemble **[0,24]**

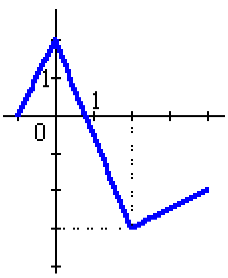
On lit en ordonnée la température, **fonction** de l'heure.

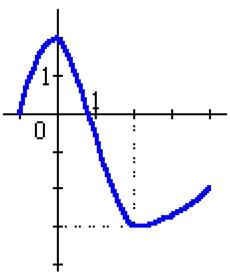
b) d'un tableau donnant, pour chaque valeur de *x*, la valeur de *f*(*x*) correspondante

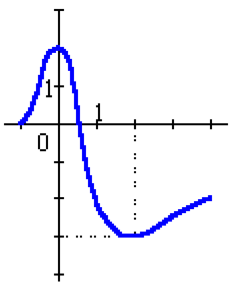
Inconvénient : En dehors des valeurs données, la connaissance de la fonction n'est pas bonne

Voici par exemple 3 fonctions pouvant correspondre au tableau de valeurs :

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0	2	0	-3	-2







c) d'une formule permettant de calculer *f*(*x*) à partir de *x*

Définition - Notation :

On note $\begin{array}{l} f\ :\ D \rightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \rightarrow f(x) \end{array}$

x est appelée la **variable.** Elle varie dans **l'ensemble de définition** de la fonction f, souvent noté D ou Df.

C'est l'ensemble des nombres réels x pour lesquels on peut déterminer $f(x)$

On dit que x a pour **image** $f(x)$ par la fonction f.

Si $b = f(a)$, on dit aussi que a est **un antécédent de *b* par *f***

jgcuaz@hotmail.com

ATTENTION à ne pas confondre la fonction *f* et le nombre *f*(*x*) image d'un réel *x* par *f*.

Exemple :
Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^2$.

Alors $g(0)=0^2=0$; $g(2)=2^2=4$; $g(-3)=(-3)^2=9$

2 est **un antécédent de 4 mais il en existe d'autres : par exemple -2**

Soit la fonction *h* définie sur $[0;+\infty[$ par $h(x)=\sqrt{x}$. **Alors –3 n'a pas d'antécédent par *h***

2) Le point de vue graphique

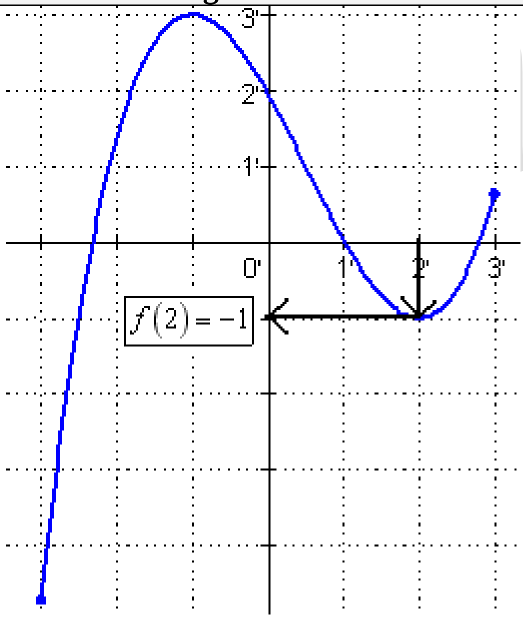
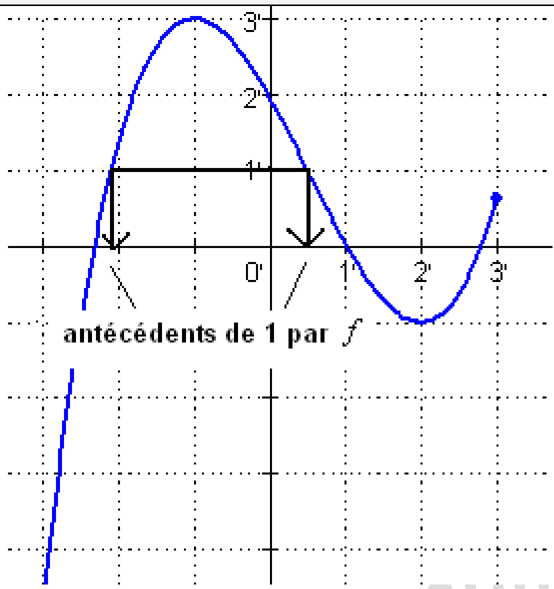
Dans tout le paragraphe, on suppose que le plan est muni d'un repère (éventuellement orthonormé ou orthogonal)

Définition :
Soit *f* une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$
On appelle **courbe représentative de *f***, ou plus simplement **représentation graphique** de *f* l'ensemble *C* des points M du plan de coordonnées (*x* ; *f*(*x*)), pour *x* variant dans D
On dit que $y=f(x)$ est une équation de la courbe représentative *C* de *f*

Propriété :
Un point *M*(*a* ;*b*) appartient à la courbe représentative d'une fonction si et seulement si *b* = *f*(*a*)

LECTURE D'IMAGES ET D'ANTECEDENTS

La courbe tracée est la représentation graphique d'une certaine fonction *f* .

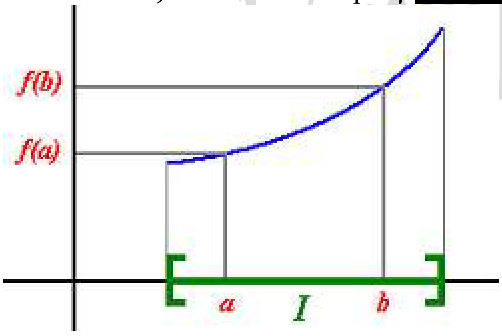
Lectures d'images	**Lecture d'antécédents**
 On détermine graphiquement l'image du nombre 2 par la fonction *f* en se plaçant sur l'axe des abscisses au point d'abscisse 2 et en rejoignant la courbe. L'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 2 est égale à $\boxed{f(2)}$. On lit sur le graphique $\boxed{f(2)=-1}$ On rédigera : « l'image de 2 par *f* est l'ordonnée du point de *C* d'abscisse 2 »	 On détermine graphiquement un antécédent du nombre 1 par la fonction *f* en se plaçant sur l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 1 et en rejoignant la courbe. L'abscisse du point de la courbe d'ordonnée 1 , s'il existe est un antécédent de 1 par *f* Remarque : Ces antécédents peuvent être plusieurs Dans notre exemple, on lit deux antécédents : -2,1 et 0,5 En revanche, le nombre 4 n'admet pas d'antécédent par *f* On rédigera : « les antécédents de 1 par *f* sont les abscisses des points de *C* dont l'ordonnée vaut 1. On les obtient par intersection de *C* et de la droite d'équation *y*=1

jgcuaz@hotmail.com

3) Sens de variation des fonctions, extremums

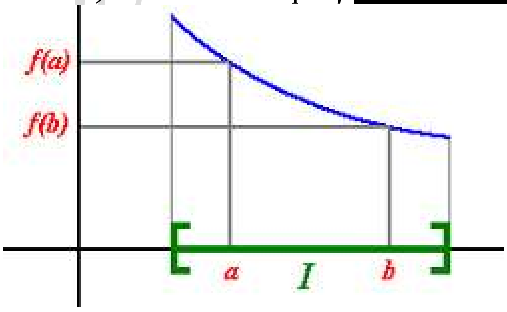
Définition :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I

La fonction f sera dite **strictement croissante** sur I si pour toutes les valeurs a et b de I telles que $a < b$,
on a $f(a) < f(b)$
(les images et les antécédents sont rangés dans le même ordre). On dit aussi que f **conserve l'ordre**



On peut donner une interprétation graphique en disant que "plus les x augmentent", c'est à dire plus on se déplace le long de la courbe dans le sens des x croissants, plus les valeurs de $f(x)$ augmentent

La fonction f sera dite **strictement décroissante** sur I si pour toutes les valeurs a et b de I telles que $a < b$,
on a $f(a) > f(b)$
(les images et les antécédents sont rangés dans l'ordre inverse). On dit aussi que f **renverse l'ordre**



On peut donner une interprétation graphique en disant que "plus les x augmentent", c'est à dire plus on se déplace le long de la courbe dans le sens des x croissants, plus les valeurs de $f(x)$ diminuent

La fonction f est dite **constante** sur I si pour toutes les valeurs a et b de I on a $f(a) = f(b)$

REMARQUE : Le sens de variation d'une fonction en un point **N'A AUCUN SENS**

Remarque – définition :
Une fonction f peut changer de sens de variation en plusieurs valeurs
La fonction f est dite **monotone** sur un intervalle I si elle garde la même variation sur I.

Extremums d'une fonction

Définitions :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et c un élément de I qui n'est pas une borne de I.
On dit que f admet un maximum local M (respectivement minimum local m) en c si on peut trouver un intervalle ouvert J inclus dans I tel que M (resp m) soit le maximum (resp minimum) de f sur J (c'est-à-dire tel que pour tout $x \in J$, on ait $f(x)<M$ (respectivement $f(x)>m$).
Si c est une borne de I, on peut se contenter d'un intervalle J semi-ouvert

On appelle extremum local un maximum local ou un minimum local

Exemples : Voir ci-dessous

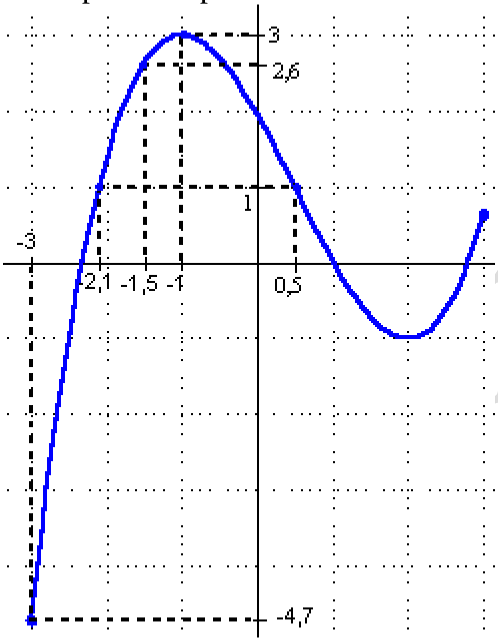
TABLEAU DE VARIATION
Le tableau de variation est un résumé des renseignements que nous connaissons sur la fonction ou sur sa courbe représentative. Dans tout tableau de variations,
- On repère sur la première ligne **la variable x variant sur son ensemble de définition**
- On découpe Df en autant d'intervalles sur lesquels la fonction est **monotone**

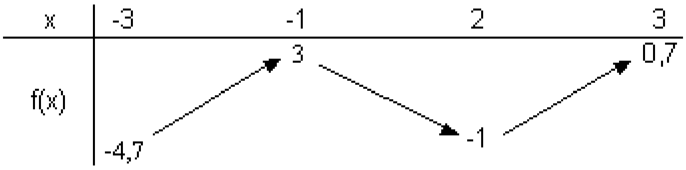
On signale d'une flèche :
- montante **la stricte croissance de la fonction**, descendante **la stricte décroissance de la fonction**.
- horizontale **la constance de la fonction**

S'ils existent on repère le minimum et/ou le maximum de la fonction f sans oublier la valeur en lesquels ils sont atteints.

jgcuaz@hotmail.com

Voici par exemple la courbe et le tableau de variations d'une fonction *f*





On décrit les variations à l’aide de phrases :
La fonction *f* et strictement croissante sur [-3 ;-1], strictement décroissante sur [-1 ;2], et strictement croissante sur [2 ;3]
Son minimum est –4,7, atteint lorsque *x*=-3
Son maximum est 3, atteint lorsque *x*=-1
-1 est un minimum local en 2

jgcuaz@hotmail.com