Etude d'une fonction polynôme du 3ième degré

Exercice : Etudier la fonction $x \mapsto x^3 - 3x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$ puis donner les différentes solutions de l'équation $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ avec une précision au dixième

Solution :

1) **Domaine de définition** : La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R}$

2) **Axe ou centre de symétrie** : cette fonction n'est ni paire, ni impaire
donc la représentation graphique C_f de la fonction f dans un repère du plan n'admet
ni l'axe des ordonnées comme axe de symétrie,
ni l'origine du repère (le point O) comme centre de symétrie.
Donc nous allons étudier cette fonction sur $\mathbb{R}$ tout entier, c'est-à-dire pour $x \in]-\infty ; +\infty[$

3) **Tableau de variation** : cette fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculons la fonction dérivée et étudions le signe de cette fonction dérivée.
Si on pose $f(x) = (u + v + w)(x)$ avec $u(x) = x^3$ et $v(x) = -3x^2$ et $w(x) = 1$
on a $f'(x) = u'(x) + v'(x) + w'(x)$ avec $u'(x) = 3x^2$ et $v(x) = -6x$ et $w'(x) = 0$

Donc $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

L'étude du signe de la fonction f' **sur** $\mathbb{R}$ nous permet de construire le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et sur $[2, +\infty[$ et est strictement décroissante sur $[0, 2]$

Etudions les branches infinies de la courbe représentative de f, c'est-à-dire calculons les 2 limites suivantes : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Pour étudier ces 2 limites on suppose que $x \neq 0$ et on peut écrire

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 = x^3\left(\frac{x^3}{x^3} - \frac{3x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3}\right) = x^3\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\right)$$

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ et comme $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^3} = 1$ on peut conclure que

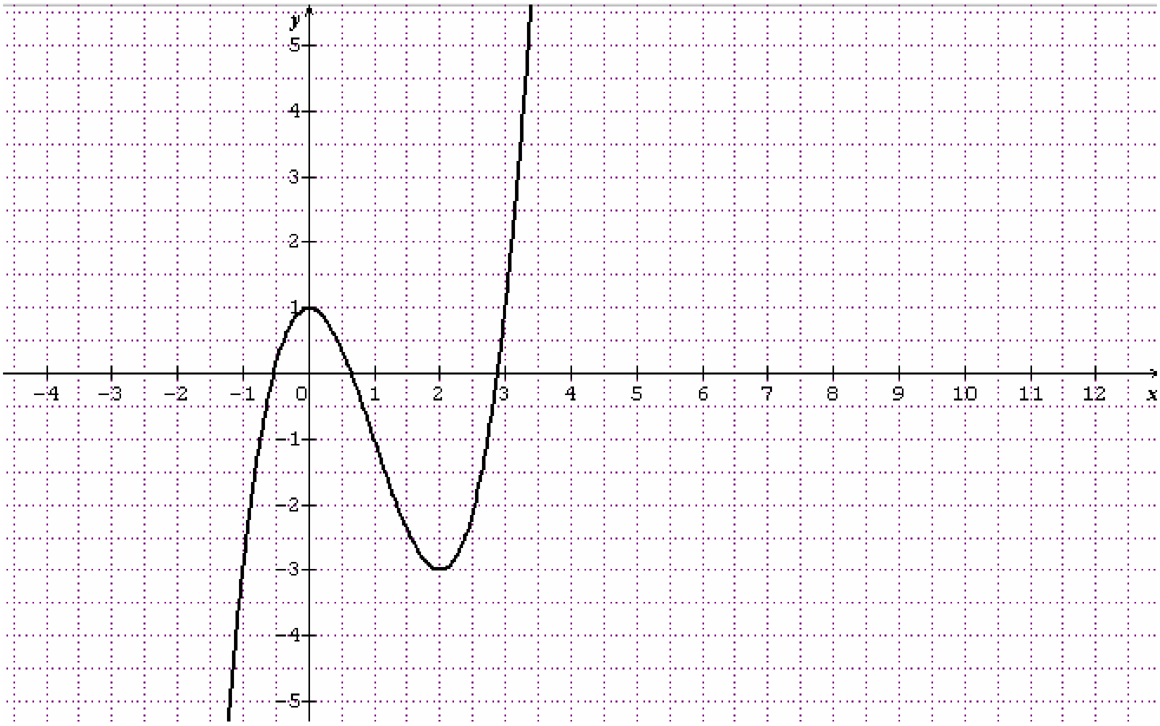
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \times 1 = -\infty$

<u>Conclusion</u> $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

Avec le même raisonnement on peut calculer la limite de *f* quand $x \to +\infty$

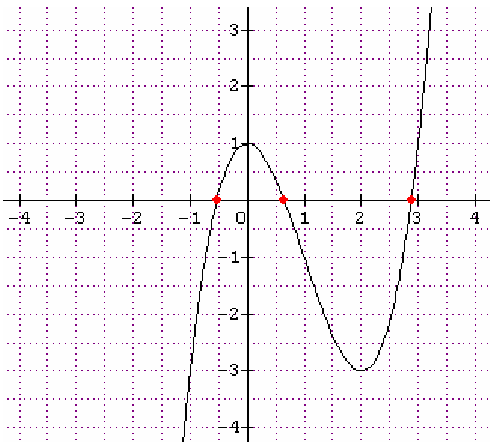
et on peut écrire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

4) Courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$: c'est-à-dire C_f



5) Solutions de l'équation $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ (avec un encadrement à 10^{-1})

D'après le graphique (*et en appliquant 3 fois le théorème des valeurs intermédiaires ou le théorème de la bijection*), on voit que l'équation $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ admet 3 solutions (les abscisses des 3 points tracés en rouge sur le graphique ci dessous)



Encadrons à 10^{-1} près les 3 solutions de l'équation $x^3-3x^2+1=0$

- Comme $(-0,6)^3-3(-0,6)^2+1\approx -0,3\leq 0$

  $(-0,5)^3-3(-0,5)^2+1\approx 1,2\geq 0$

  $\boxed{\text{on peut conclure que } -0,6\leq x_1\leq -0,5 \text{ est solution de l'équation}}$

  en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires ou le théorème de la bijection

- Comme $(0,5)^3-3(0,5)^2+1\approx 0,4\geq 0$

  $(0,6)^3-3(0,6)^2+1\approx 0,1\geq 0$

  $(0,7)^3-3(0,7)^2+1\approx -0,1\leq 0$

  $\boxed{\text{on peut conclure que } 0,6\leq x_2\leq 0,7 \text{ est solution de l'équation}}$

  en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires ou le théorème de la bijection

- Comme $(2,5)^3-3(2,5)^2+1\approx -2,1\leq 0$

  $(2,6)^3-3(2,6)^2+1\approx -1,7\leq 0$

  $(2,7)^3-3(2,7)^2+1\approx -1,2\leq 0$

  $(2,8)^3-3(2,8)^2+1\approx -0,6\leq 0$

  $(2,9)^3-3(2,9)^2+1\approx +0,2\geq 0$

  $\boxed{\text{on peut conclure que } 2,8\leq x_3\leq 2,9 \text{ est solution de l'équation}}$

  en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires ou le théorème de la bijection