

3 exercices sur des inégalités très connues

Exercice n°1 : Montrer que $\forall x \in [0, +\infty[\quad \sin(x) \leq x$ $[0, +\infty[$

Conseil : étudier la fonction $h : x \mapsto x - \sin(x)$ sur $[0, +\infty[$

Correction

$$\forall x \in [0, +\infty[\quad h(x) = (u+v)(x) \text{ avec } u(x) = x \text{ et } v(x) = -\sin(x)$$

La fonction h est dérivable sur $[0, +\infty[$. Calculons la fonction dérivée h' sur $[0, +\infty[$

$$h'(x) = (u+v)'(x) = u'(x) + v'(x) \text{ et } u'(x) = 1 \quad v'(x) = -\cos(x)$$

$$\text{donc } h'(x) = (u+v)'(x) = 1 - \cos(x)$$

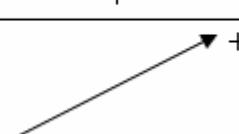
Cherchons le signe de cette fonction dérivée. On sait que $\forall x \in [0, +\infty[\quad -1 \leq \cos(x) \leq +1$

$$\text{donc } \forall x \in [0, +\infty[\quad +1 \geq -\cos(x) \geq -1 \text{ donc } \forall x \in [0, +\infty[\quad 0 \leq 1 - \cos(x) \leq 2$$

On peut conclure que $\forall x \in [0, +\infty[\quad h'(x) \geq 0$

D'où le tableau de variation :

x	0	$+\infty$
$h'(x)$	+	
$h(x)$	0	$+\infty$



La fonction h est croissante sur $[0, +\infty[$

$$\text{On a donc } \forall x \in [0, +\infty[\quad h(0) \leq h(x)$$

$$\text{Comme } h(0) = 0 - \sin(0) = 0$$

$$\text{On peut conclure } \forall x \in [0, +\infty[\quad 0 \leq h(x)$$

Conclusion : $\forall x \in [0, +\infty[\quad 0 \leq x - \sin(x)$ donc $\forall x \in [0, +\infty[\quad \sin(x) \leq x$

Exercice n°2 : En utilisant le résultat de l'exercice précédent, montrer que

$$\forall x \in [0, +\infty[\quad 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1$$

Conseil : étudier la fonction $h : x \mapsto \cos(x) - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$ sur $[0, +\infty[$

Exercice n°3 : Montrer que $\forall x \in \left]0, \frac{\Pi}{2}\right[\quad x < \tan(x)$

Conseil : étudier la fonction $h : x \mapsto \tan(x) - x$ sur $\left]0, \frac{\Pi}{2}\right[$

$$\text{Rappel : si } x \neq \frac{\Pi}{2} + k\Pi \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \text{ et } \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$