3 exercices sur des inégalités très connues

Exercice n°1 : Montrer que $\forall x \in [0,+\infty[\quad sin(x) \leq x \quad [0,+\infty[$

Conseil : étudier la fonction $h : x \mapsto x - sin(x)$ sur $[0,+\infty[$

Correction

$\forall x \in [0,+\infty[\quad h(x) = (u+v)(x)$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = -sin(x)$

La fonction h est dérivable sur $[0,+\infty[$. Calculons la fonction dérivée h' sur $[0,+\infty[$

$h'(x) = (u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)$ et $u'(x) = 1 \quad v'(x) = -cos(x)$

donc $h'(x) = (u+v)'(x) = 1 - cos(x)$

Cherchons le signe de cette fonction dérivée. On sait que $\forall x \in [0,+\infty[\quad -1 \leq cos(x) \leq +1$

donc $\forall x \in [0,+\infty[\quad +1 \geq -cos(x) \geq -1$ donc $\forall x \in [0,+\infty[\quad 0 \leq 1 - cos(x) \leq 2$

On peut conclure que $\forall x \in [0,+\infty[\quad h'(x) \geq 0$

D'où le tableau de variation :

x	0 $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$h'(x)$	$+$
$h(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

La fonction h est croissante sur $[0,+\infty[$

On a donc $\forall x \in [0,+\infty[\quad h(0) \leq h(x)$

Comme $h(0) = 0 - sin(0) = 0$

On peut conclure $\forall x \in [0,+\infty[\quad 0 \leq h(x)$

Conclusion : $\forall x \in [0,+\infty[\quad 0 \leq x - sin(x)$ donc $\forall x \in [0,+\infty[\quad sin(x) \leq x$

Exercice n°2 : En utilisant le résultat de l'exercice précédent, montrer que

$\forall x \in [0,+\infty[\quad 1 - \dfrac{x^2}{2} \leq cos(x) \leq 1$

Conseil : étudier la fonction $h : x \mapsto cos(x) - \left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right)$ sur $[0,+\infty[$

Exercice n°3 : Montrer que $\forall x \in \left]0, \dfrac{\Pi}{2}\right[\quad x < tan(x)$

Conseil : étudier la fonction $h : x \mapsto tan(x) - x$ sur $\left[0, \dfrac{\Pi}{2}\right[$

Rappel : si $x \neq \dfrac{\Pi}{2} + k\Pi \quad tan(x) = \dfrac{sin(x)}{cos(x)}$ et $tan'(x) = \dfrac{1}{cos^2(x)}$