

Trigonométrie dans le cercle

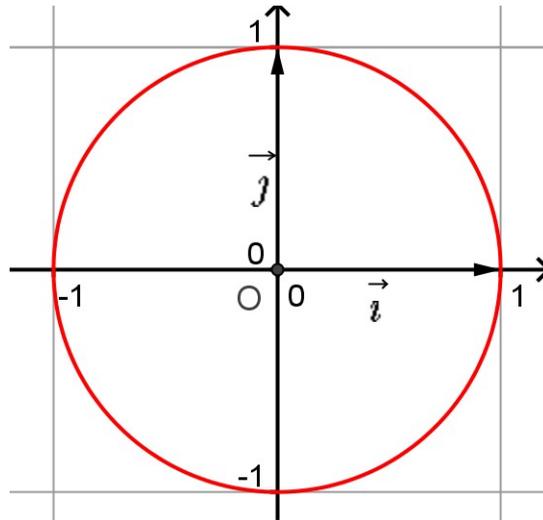
Table des matières

1	Angles dans un cercle	2
1.1	Cercle trigonométrique	2
1.2	Le radian	2
1.3	Angles dans le cercle trigonométrique	3
2	Lignes trigonométriques	5
2.1	Définitions	5
2.2	Tableau des angles remarquables	5
2.3	Relations entre deux angles	6
2.3.1	Angles opposés	6
2.3.2	Angles supplémentaires et opposés supplémentaires	6
2.3.3	Angles complémentaires et opposés complémentaires	6
2.4	Lignes trigonométriques dans le cercle	7
3	Représentation des fonction sinus, cosinus et tangente	8

1 Angles dans un cercle

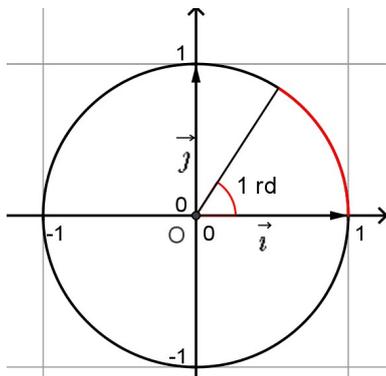
1.1 Cercle trigonométrique

Définition 1 : On appelle cercle trigonométrique dans un repère orthogonal direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$, le cercle de centre O et de rayon 1.



1.2 Le radian

Définition 2 : La radian est une unité de mesure d'un angle comme le degré. Il est défini comme la longueur de l'arc entre 2 points du cercle unité. Le demi cercle unité a une longueur de π et donc correspond à un angle de π radian. On a alors : $180^\circ = \pi$ rd



La mesure en degré de 1 radian vaut donc :

$$1 \text{ rd} = \frac{180}{\pi} \simeq 57^\circ$$

Remarque : Le radian est une grande unité qui n'est pas intuitive contrairement au degré qui est notre unité première.

Avantage : Permet de connaître la longueur d'un arc. Unité du système international

Il est important de connaître les angles remarquables en radian :

Degré	30°	45°	60°	90°
Radian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Exemple : Convertir en radian les angles en degré suivants :

$$15^\circ, 36^\circ, 75^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$$



Pour convertir un angle en radian, on utilise la conversion $180^\circ = \pi$ rd, soit pour x degré on a : $\frac{x \pi}{180}$ radian.

On obtient alors :

Degré	15°	36°	75°	120°	135°	150°
Radian	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

Exemple : Convertir en degré les angles en radian suivant :

$$\frac{\pi}{8}, \frac{7\pi}{12}, \frac{5\pi}{18}, \frac{11\pi}{6}$$



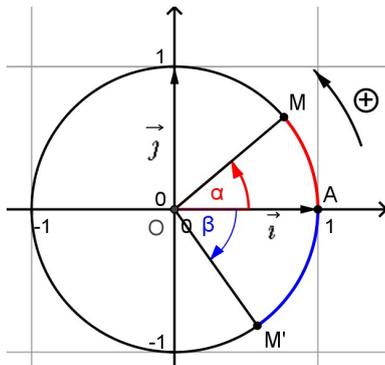
Pour convertir un angle en degré, on utilise la conversion $180^\circ = \pi$ rd, soit pour y radian on a : $\frac{y 180}{\pi}$ degré.

Radian	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{18}$	$\frac{11\pi}{6}$
Degré	$22,5^\circ$	105°	50°	330°

1.3 Angles dans le cercle trigonométrique

Définition 3 : La mesure d'un angle α repéré par un point M dans le cercle trigonométrique, est la valeur algébrique de la longueur de l'arc \widehat{AM} où $A(1;0)$

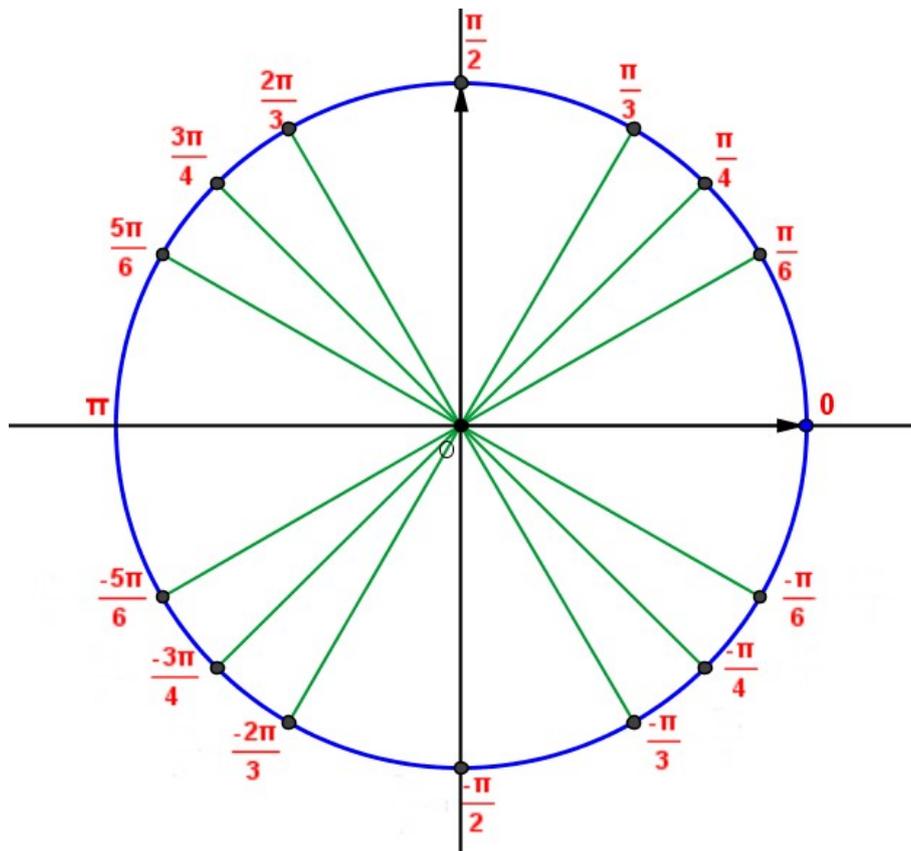
Le sens trigonométrique ou direct correspond au sens antihoraire.



On a représenté deux angles α et β dont l'un est positif α et l'autre négatif β .

On remarquera que l'on a indiqué le sens trigonométrique

On peut noter les angles remarquables sur le cercle trigonométrique. Il est important de visualiser l'emplacement des angles pour s'en faire une idée.

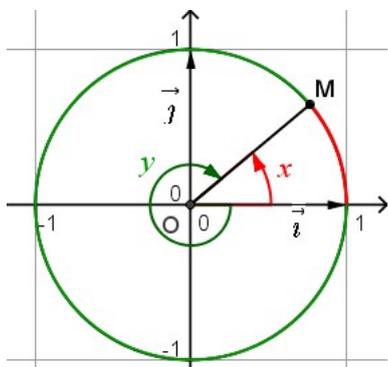


Propriété 1 : Un même angle α peut avoir plusieurs mesures.

Si un angle α , repéré par le point M sur le cercle trigonométrique, a comme mesures x et y , alors on a la relation suivante :

$$y = x + k2\pi \quad \text{ou plus simplement} \quad y = x [2\pi] \quad y \text{ égal } x \text{ modulo } 2\pi$$

Exemple : Soit deux mesures sur le cercle trigonométrique d'un même angle :



Sur la figure ci-contre on a tracé deux mesures d'un même angle repéré par un point M .

Par exemple $x = \frac{\pi}{6}$ et $y = -\frac{11\pi}{6}$.

En effet :

$$\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{(1+11)\pi}{6} = 2\pi$$

Définition 4 : On appelle **mesure principale** d'un angle α , la mesure x qui se trouve dans l'intervalle $] -\pi; \pi]$

Exemple : Trouver la mesure principale des angles dont les mesures sont :
 $\frac{17\pi}{4}$ et $-\frac{31\pi}{6}$



$\frac{17\pi}{4}$ est un mesure trop grande, il faut donc lui enlever un nombre k de tours (2π) pour obtenir la mesure principale :

$$\frac{17\pi}{4} - k2\pi = \frac{\pi(17 - 8k)}{4} = \frac{\pi}{4} \quad \text{avec } k = 2$$

$-\frac{31\pi}{6}$ est une mesure trop petite, il faut donc lui rajouter un nombre k de tours (2π) pour obtenir la mesure principale :

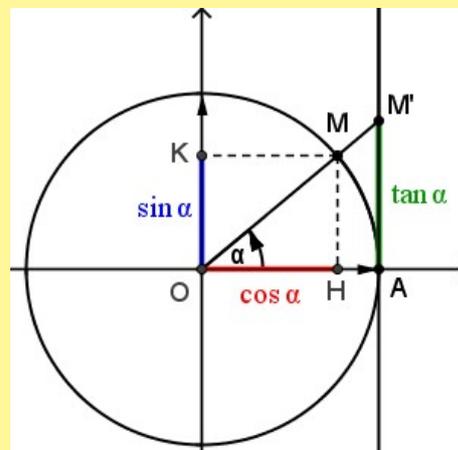
$$-\frac{31\pi}{6} + k2\pi = \frac{\pi(-31 + 12k)}{6} = \frac{5\pi}{6} \quad \text{avec } k = 3$$

2 Lignes trigonométriques

2.1 Définitions

Définition 5 : Soit un angle α repéré par un point M sur le cercle trigonométrique. On appelle :

- ⇨ $\cos \alpha = \overline{OH}$ projection de M sur l'axe des abscisses
- ⇨ $\sin \alpha = \overline{OK}$ projection de M sur l'axe des ordonnées
- ⇨ $\tan \alpha = \overline{AM'}$ intersection de (OM) avec la tangente en A



Remarque : Pour tout réel x , on a :

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin x \leq 1$$

2.2 Tableau des angles remarquables

Comme déjà vu dans le chapitre sur les configurations, voici le tableau à très bien connaître :

Angle	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$?

2.3 Relations entre deux angles

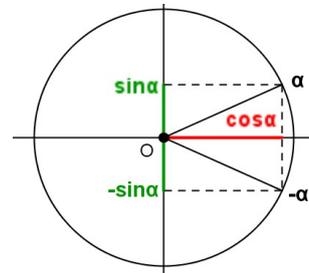
2.3.1 Angles opposés

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = +\cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

On peut constater que les fonctions sinus et tangente sont impaires tandis que la fonction cosinus est paire



2.3.2 Angles supplémentaires et opposés supplémentaires

Angles supplémentaires

$$\sin(\pi - \alpha) = +\sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

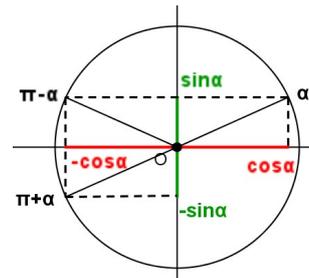
$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

Angles opposés supplémentaires

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = +\tan \alpha$$

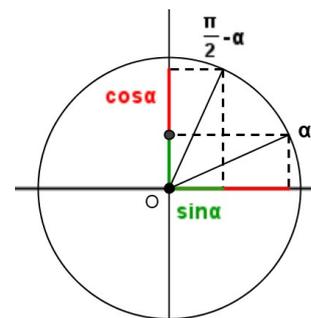


2.3.3 Angles complémentaires et opposés complémentaires

Angles complémentaires

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

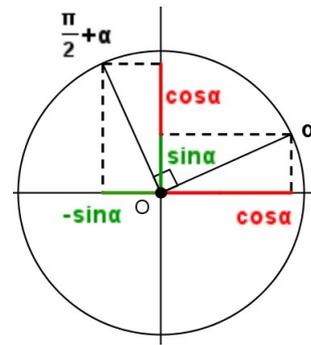
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$



Angles opposés complémentaires

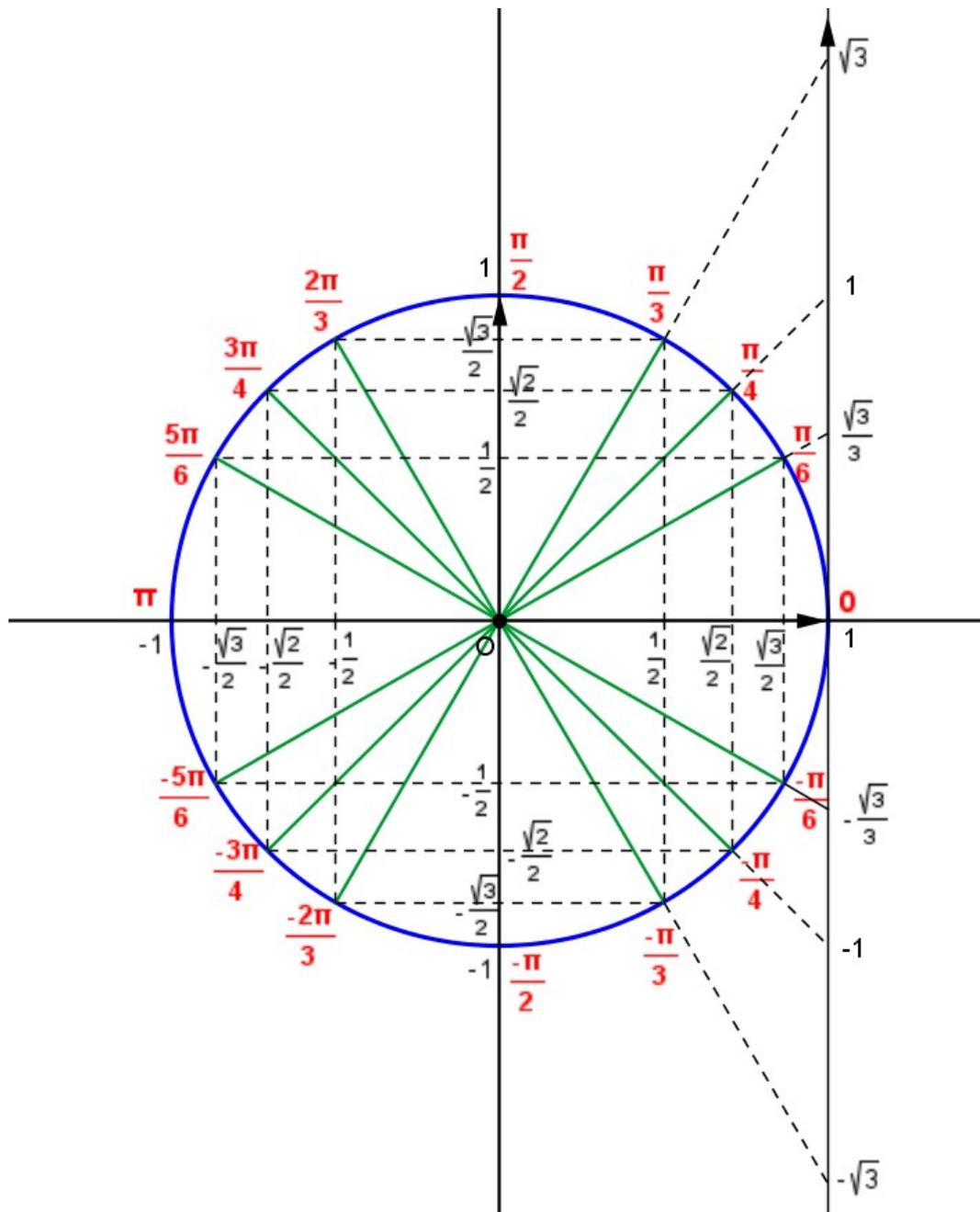
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$



2.4 Lignes trigonométriques dans le cercle

Voici sur le cercle trigonométriques l'ensemble des lignes trigonométriques des angles remarquables dans le cercle trigonométrique.



Exemple : Calculer le cosinus, le sinus et la tangente des angles suivants :

$$-\frac{\pi}{3} \quad , \quad \frac{5\pi}{6} \quad , \quad \frac{7\pi}{4}$$



⇨ Avec $-\frac{\pi}{3}$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

⇨ Avec $\frac{5\pi}{6}$

$$\cos\frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{5\pi}{6} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

⇨ Avec $\frac{7\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$

$$\cos\frac{7\pi}{4} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\frac{7\pi}{4} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\frac{7\pi}{4} = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$$

3 Représentation des fonction sinus, cosinus et tangente

Les courbes des fonction sinus et cosinus s'appelle des sinusoïdes. Elle sont identiques à une tranlation près.

La courbe de la fonction tangente n'a pas de nom. On peut remarquer que la fonction tangente n'est pas définie en $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

