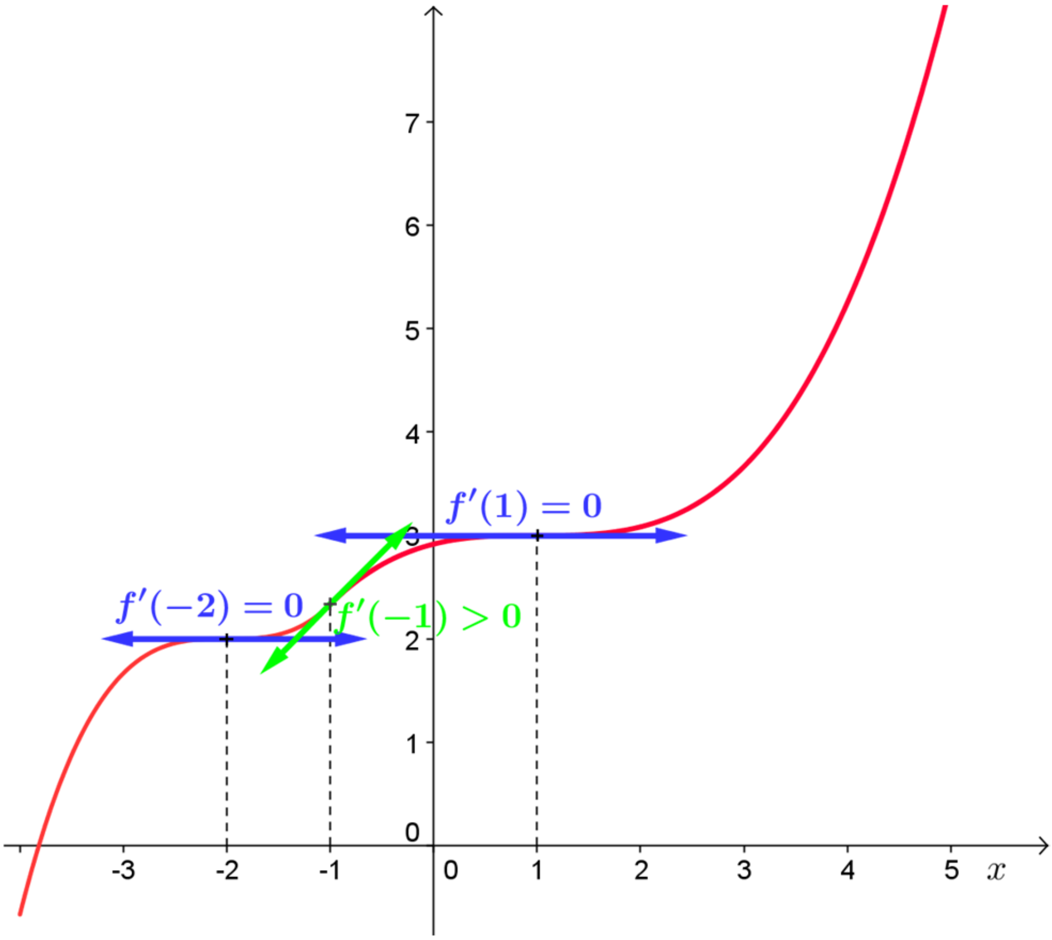
Dérivées et applications

I) Dérivée d'une fonction strictement monotone

1) Exemples graphiques

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Pour tout $x \in$ I, $f'(x)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x.

- **Si f est strictement croissante sur I**

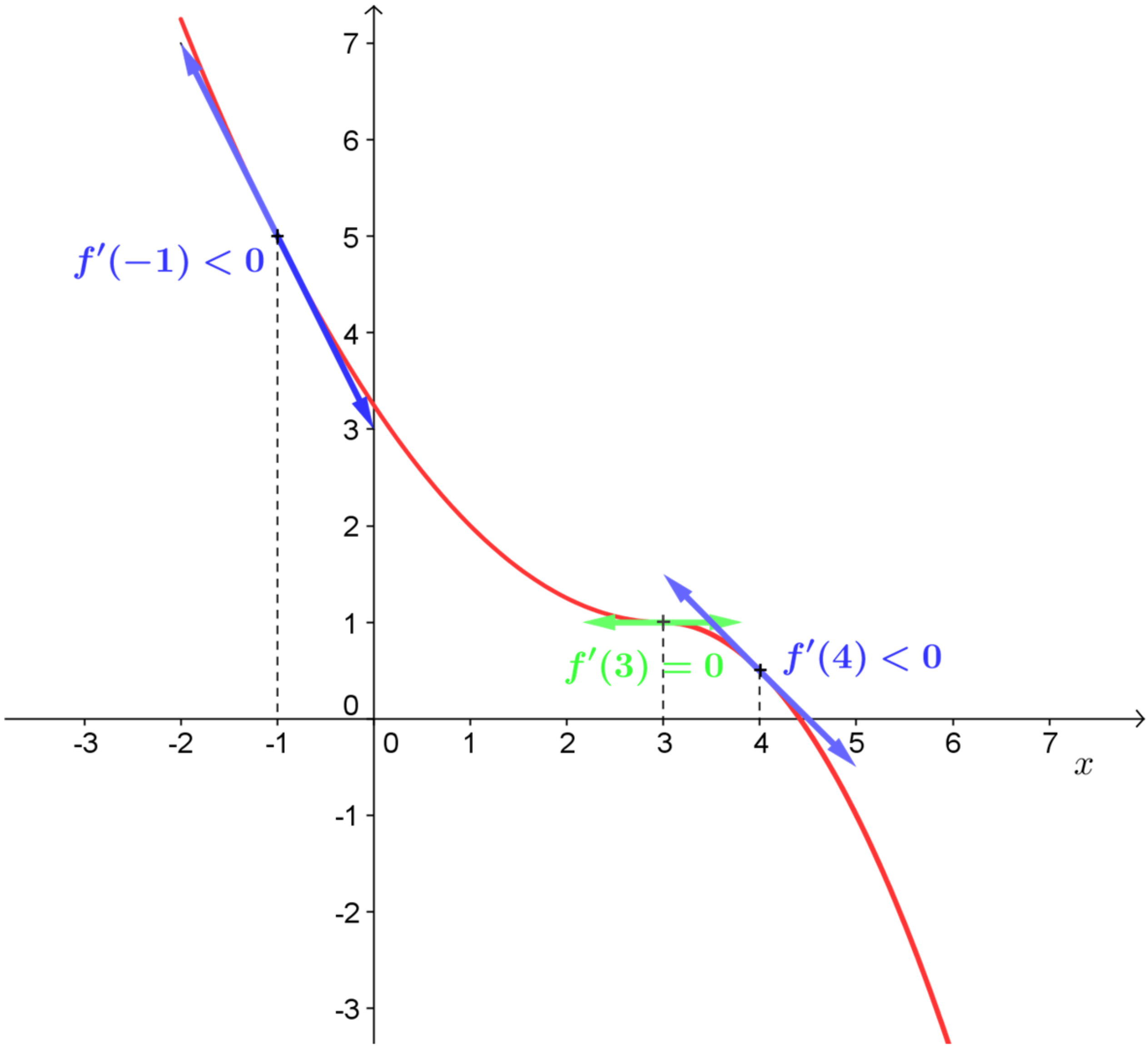


Les tangentes à la courbe ont toutes un coefficient directeur :

- Soit strictement positif
- Soit égal à zéro (dans le cas de tangente horizontale)

On constate graphiquement que $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in$ I

- **Si f est strictement décroissante sur I**



Les tangentes à la courbe ont toutes un coefficient directeur :

- Soit strictement négatif
- Soit égal à zéro (dans ce cas la tangente horizontale)

On constate graphiquement que $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in$ I

1) Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I

• Si f est strictement croissante sur I, alors pour tout x de I, $f'(x) \geq 0$

• Si f est strictement décroissante sur I, alors pour tout x de I, $f'(x) \leq 0$

Démonstration :

Supposons f strictement croissante sur I et dérivable sur I.

Alors pour tout réel a de I et pour tout h ($h \neq 0$ tel que $a + h \in I$)

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

• Si $h > 0$ alors $a+h > a$ et $f(a+h) > f(a)$ par stricte croissance de f
• Si $h < 0$ alors $a+h < a$ et $f(a+h) < f(a)$ par stricte croissance de f

Dans les deux cas $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} > 0$. On admet que la limite $f'(a)$ quand h tend vers 0 de ces nombres tous strictement positifs est positive ou nulle, pour tout a dans I

Si f est strictement décroissante sur I, on montre de même que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} < 0$ et que la limite sera elle négative ou nulle.

II) Sens de variation et dérivée

Théorème de stricte monotonie

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

• Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in$ I alors f est constante sur I ;

• Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in$ I sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de x où f' s 'annule, alors f est strictement croissante sur I ;

• Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in$ I sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de x où f' s 'annule, alors f est strictement décroissante sur I.

Ce théorème est admis

Exemples

1°) Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

La fonction f est une fonction polynôme définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

f' est un trinôme du second degré ayant deux racines 0 et 2 donc son signe s'obtient à l'aide du tableau :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Signe de $3x(x-2)$		**+**	0	**–**	0	**+**	

L'étude du signe de f' montre que :

- $f'(x) > 0$ sur les intervalles]- ∞ ; 0[et]2 ; + ∞[, donc que f est strictement croissante sur ces intervalles.
- $f'(x) < 0$ sur l'intervalle]0 ; 2[, donc que f est strictement décroissante sur cet intervalle.

2°) Soit $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x-1}$ définie et dérivable sur D =] -∞ ; 1[∪] 1 ; +∞[

On a $f'(x) = \dfrac{(2x-3)(x-1)-(x^2-3x+6)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$

Le dénominateur étant un carré, il est toujours positif donc :
sur D, $f'(x)$ possède le même signe que son numérateur qui est un trinôme du second degré possédant deux racines – 1 et 3 dont le signe est donné par le tableau :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
Signe de $(x+1(x-3)$		**+**	0	**–**	0	**+**	

- Sur] - ∞ ; -1 [on a $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante sur cet intervalle ;
- Sur] -1 ; 1 [on a $f'(x) < 0$ et f est strictement décroissante sur cet intervalle ;
- Sur] 1 ; 3 [on a $f'(x) < 0$ et f est strictement décroissante sur cet intervalle ;
- Sur] 3 ; + ∞ [on a $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante sur cet intervalle.

III) Lecture d'un tableau de variation

Convention

Dans un tableau de variation d'une fonction f, une flèche indique :

• La stricte croissance ou décroissance de f sur l'intervalle correspondant ;

• L'absence de rupture (ou continuité) de la courbe de f sur cet intervalle.

Une double barre dans le tableau de variation indique qu'il y a rupture que la fonction n'est pas définie pour une ou des valeurs de x.

Exemples :

1°)

x	-5		1		3		7
Signe de $f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
Variations de f	-1	↗	3	↘	-2	↗	5

Le tableau ci-dessus apporte les renseignements suivants :

• La fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $[-5\,;\,7]$

• La fonction f est strictement croissante sur les intervalles $[-5\,;\,1]$ et $[3\,;\,7]$

• La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[1\,;\,3]$

• La courbe est sans rupture sur les intervalles $[-5\,;1]$; $[1\,;3]$ et $[3\,;\,7]$ (on dit aussi que la fonction f est continue sur ces intervalles)

• $f(-5) = -1$; $f(1) = 3$; $f(3) = -2$ et $f(7) = 5$

2°)

x	-7		4		8
Signe de $f'(x)$		$+$	‖	$-$	
Variations de f	2	↗	‖	↘	-5

Le tableau ci-dessus apporte les renseignements suivants :

• La fonction f est définie et dérivable sur l'ensemble D$=[-7\,;\,4[\cup]4\,;\,8]$

• La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[-7\,;\,4[$

• La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]4\,;\,8]$

• La courbe possède une rupture pour $x = 4$ mais elle est sans rupture sur les intervalles $[-7\,;\,4[$ et $]4\,;\,8]$

• $f(-7) = 2$; $f(8) = -5$ et le réel 4 n'a pas d'image.

3°)

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	‖	$-$	‖	+	‖	$-$	
Variations de f		↗	‖	↘	**3**	↗	‖	↘	

Le tableau ci-dessus apporte les renseignements suivants :

- La fonction f est définie sur l'ensemble D$=]-\infty\,;\,-2[\,\cup\,]-2\,;\,2[\,\cup\,]2\,;\,+\infty\,[$
- La fonction f est dérivable sur l'ensemble D privé de 0
- La fonction f est strictement croissante sur les intervalles $]-\infty\,;\,-2[$ et $[0\,;2[$
- La fonction f est strictement décroissante sur les intervalles $]-2\,;\,0]$ et $]\,2\,;\,+\infty\,[$
- La courbe possède des ruptures pour $x = -2$ et pour $x = 2$ mais elle est sans rupture sur les intervalles $=]-\infty\,;\,-2\,[\,;\,]-2\,;\,2[$ et $]2\,;\,+\infty[$
- $f(0) = 3$; et les réels – 2 et 2 n'ont pas d'image.