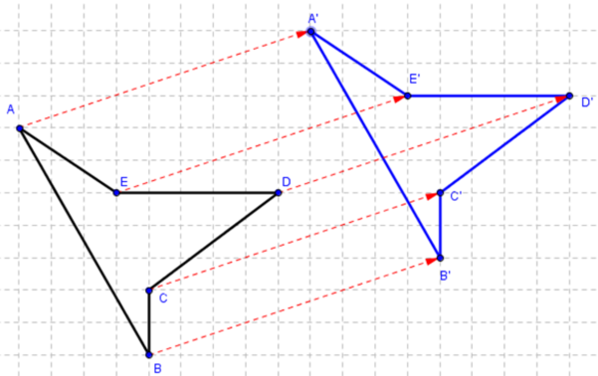
I. Définition

Les vecteurs apparaissent dans plusieurs domaines des sciences comme en science physique avec les forces exercées sur un objet ou un déplacement, comme en navigation pour représenter la force du vent, mais aussi en mathématique pour faire des démonstrations plus rapide et pour traduire certaines propriétés d'orthogonalité, de parallélisme ou d'alignement.
On peut notamment introduire les vecteurs lorsqu'on aborde le déplacement que l'on nomme « glissement » ou « translation ». Pour faire glisser un objet on utilise trois données : **Une longueur, une direction et un sens**. On regroupe ces trois données dans un seul objet mathématique que l'on nomme les vecteurs.

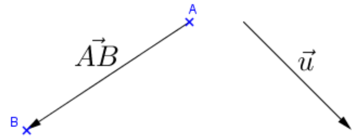


Géométriquement, un vecteur sera représenté par une flèche ayant une origine (point) et une extrémité (point). On notera par exemple ce vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour définir un déplacement de longueur AB, de direction la droite (AB) et de sens $A \mapsto B$

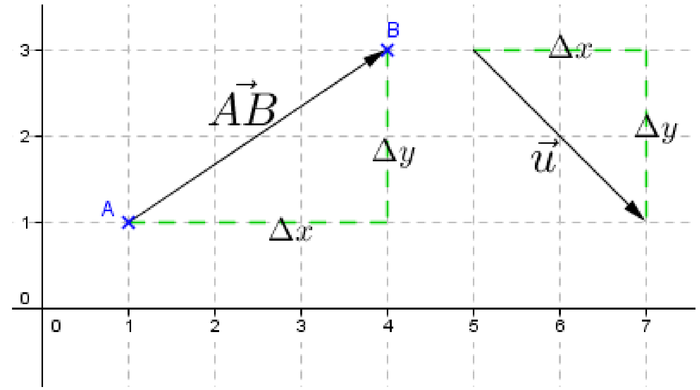
$$\boxed{\overrightarrow{AB} : \begin{cases} \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB : La\ longueur(Norme)\ entre\ A\ et\ B \\ (AB) : La\ droite\ d'extrémités\ A\ et\ B \\ A \mapsto B : le\ sens\ de\ A\ vers\ B \\ Origine\ (antécédent) : A \\ Extrémité\ (image) : B \end{cases}}$$

Si on connaît l'origine et l'extrémité alors on note ce vecteur comme ci-dessus : (ex : $\overrightarrow{AB}$)

Sinon on utilise une seule lettre minuscule pour le nommer : (ex : $\vec{u}$)



Vecteurs dans un repère



Pour définir le déplacement de A vers B on peut dire que l'on se déplace de 4 unités à l'horizontal et 2 unités à la verticale. Ces données seront les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\Delta x \\ \Delta y\end{pmatrix} ou\ \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A \\ y_B - y_A\end{pmatrix}}$$

De même

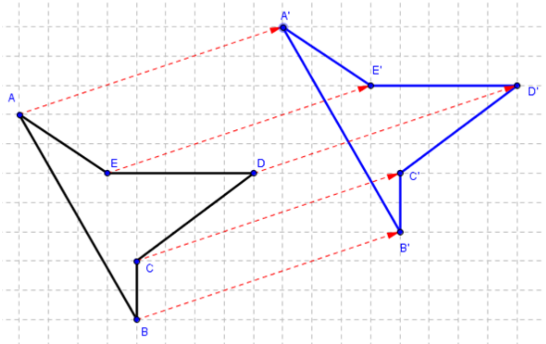
$$\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix}\Delta x \\ \Delta y\end{pmatrix}}$$

Dans l'exemple ci-dessus :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3 \\ 2\end{pmatrix} \quad et \quad \vec{u}\begin{pmatrix}2 \\ -2\end{pmatrix}$$

II. Vecteurs égaux

On dira que deux vecteurs sont égaux s'ils définissent le même déplacement.
Par exemple dans le schéma ci-dessous tous les vecteurs sont égaux.



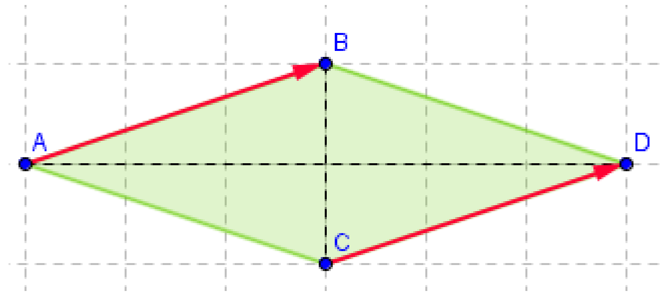
Définition :
Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même longueur, même direction et même sens.

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\begin{cases} AB=CD \\ (AB)//(CD) \\ A\mapsto B \text{ et } C\mapsto D \text{ sont identiques}\end{cases}$$

$$\vec{u}=\vec{v}\begin{cases} \|\vec{u}\|=\|\vec{v}\| \\ \text{Les droites portant } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont parallèles} \\ \text{le sens de } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont identiques}\end{cases}$$

Conséquence : Dans un repère deux vecteurs sont égaux s'ils ont les mêmes coordonnées.

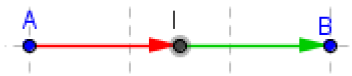
On peut aussi reconnaître des vecteurs égaux grâce aux propriétés de la figure qui est formées par les quatre points des deux vecteurs. Cette figure est toujours un parallélogramme avec des diagonales qui se coupent en leur milieu.



Propriété 01 :

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC \text{ est un parallélogramme} \Leftrightarrow [AD] \text{ et } [BC] \text{ se coupent en leur milieu}$$

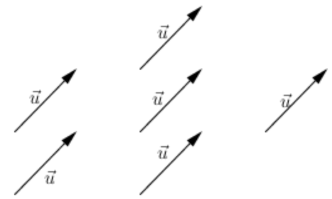
Propriété 02 :



$$I \text{ milieu de } [AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$$

Propriété 03 :

Un vecteur n'a pas d'emplacement précis. Lorsqu'on parle d'un vecteur $\vec{u}$, on parle en fait d'un des représentants de tous les vecteurs égaux à $\vec{u}$

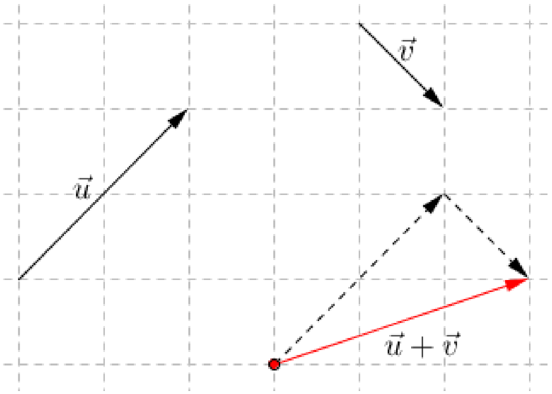


III. Opérations sur les vecteurs

a. Sommes et différences

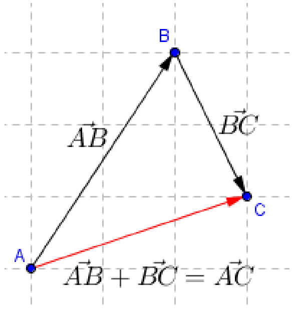
i. Construction

Effectuer la somme de deux vecteurs c'est en fait construire géométriquement un troisième vecteur de la façon suivante : Déplacer par glissement, le deuxième vecteur à l'extrémité du premier ou le premier à l'origine du deuxième.



ii. Relation de Chasles

Cas particulier d'une somme :



iii. Vecteur nul

Un vecteur nul est un vecteur ayant même origine et même extrémité.

$$\vec{0}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{CC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\ldots$$

iv. Vecteurs opposés

Deux vecteurs sont opposés si et seulement si leur somme est un vecteur nul.

$$\boxed{\begin{array}{c}\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont opposés} \\ \Leftrightarrow \\ \vec{u}+\vec{v}=\vec{0}\end{array}}$$

On écrira alors que $\vec{v}=-\vec{u}$ ou $\vec{u}=-\vec{v}$

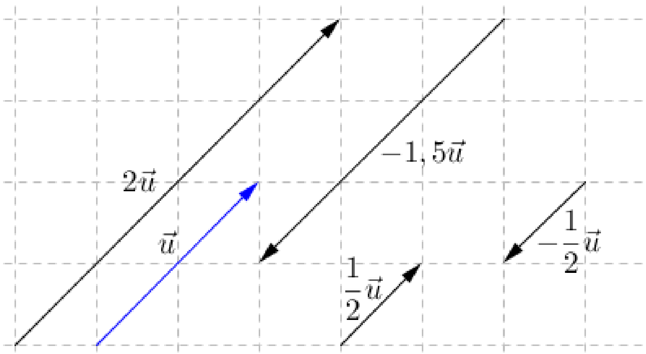
Exemple : $\boxed{\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}}$

Dans un repère, deux vecteurs opposés ont des coordonnées opposées.

$$\boxed{\begin{cases} x_{\overrightarrow{BA}}=-x_{\overrightarrow{AB}} \\ y_{\overrightarrow{BA}}=-y_{\overrightarrow{AB}} \end{cases}}$$

b. Produit par un réel

Multiplier un vecteur par un nombre réel k, revient à obtenir un vecteur ayant la même direction c'est-à-**dire une direction parallèle à la direction du vecteur de départ**. Si le réel est positif, le vecteur obtenu aura le même sens et une longueur multipliée par k. Si le réel est négatif, le vecteur aura un sens inverse et une longueur multipliée par – k.



Vocabulaire : <u>**Vecteurs colinéaires**</u>

Lorsque $\vec{u}=k.\vec{v}$ les deux vecteurs ont la même direction ou des directions parallèles mais on ne dira pas que les vecteurs sont parallèles. **On dira que les vecteurs sont colinéaires**.

$$\boxed{\begin{array}{c}\vec{u} \textit{ et } \vec{v} \textit{ colinéaires} \\ \Leftrightarrow \\ \textit{Il existe } k\in\mathbb{R} \textit{ tel que } \vec{u}=k.\vec{v}\end{array}}$$

Dans un repère :

On note $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

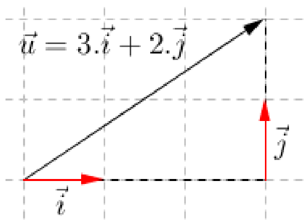
Alors :

$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix}x-x'\\y-y'\end{pmatrix}$

$-\vec{u}\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$ $\qquad$ $k.\vec{u}\begin{pmatrix}k\times x\\k\times y\end{pmatrix}$ $k\in\mathbb{R}$

Si le repère est $(O,\vec{i},\vec{j})$ avec $\vec{i}$ et $\vec{j}$ les vecteurs unités des deux axes alors

$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow \vec{u}=x.\vec{i}+y.\vec{j}$



IV. Démonstrations avec les vecteurs

a. Montrer que deux droites (AB) et (BC) sont **parallèles**.

$$\boxed{(AB)//(DC)\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \textit{ et } \overrightarrow{DC} \textit{ colinéaires}}$$

b. Montrer que trois points sont **alignés**.

$$\boxed{A,B,C \textit{ alignés} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \textit{ et } \overrightarrow{BC} \textit{ colinéaires}}$$

c. **Réduction d'une somme ou différence de deux vecteurs**.

i. **Exemple 01** :

ABC est un triangle et I le milieu de [BC]

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

$=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}$ car $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

$=2.\overrightarrow{AI}+\vec{0}$

$=2.\overrightarrow{AI}$

ii. **Exemple 02** :

Sachant que $2.\overrightarrow{GA}-3.\overrightarrow{GB}=\vec{0}$, exprimer $2.\overrightarrow{MA}-3.\overrightarrow{MB}$ à l'aide d'un seul vecteur.

$2.\overrightarrow{MA}-3.\overrightarrow{MB}$

$=2.(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})-3.(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})$

$=2.\overrightarrow{MG}-3.\overrightarrow{MG}+2.GA-3.GB$

$=-1.\overrightarrow{MG}+0$

$=\overrightarrow{GM}$

d. Expression d'un vecteur en fonction d'autres.

Exemple : Sachant que $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}.\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{BC}=-\frac{3}{4}.\overrightarrow{AL}$,

exprimer le vecteur $\overrightarrow{AC}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$.

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}.\overrightarrow{AK}-\frac{3}{4}.\overrightarrow{AL}$$