

**DM sur la droite d'Euler**

Soit ABC un triangle quelconque non aplati

Soit les 3 points A' , B' et C' : les 3 milieux respectifs des segments [BC] et [AC] et [AB]

Et soit le point O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC

( Pour ce point O et ce cercle : « Voir question BONUS du DM en bas de la page 2 de ce document » )

**PARTIE A**

Soit le point H défini par la relation  $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$

Dans cette partie : Nous allons montrer que ce point **H** est l'intersection des 3 hauteurs du triangle ABC. On aura ainsi démontré que les 3 hauteurs d'un triangle sont concourantes en ce point **H** et qu'on appelle : L'ORTHOCENTRE du triangle ABC

**Question 1 :**

Compléter le dessin qui se trouve en page 2 de ce document en traçant les **3 médiatrices des 3 segments** [BC] [AC] et [AB] . On remarque que ces 3 médiatrices sont concourantes en O et que ce point O est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC  
( Voir question BONUS du DM en bas de la page 2 de ce document )

Sur le dessin on a tracé le point H qui vérifie la relation  $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$  relation (1)

**Question 2 :**

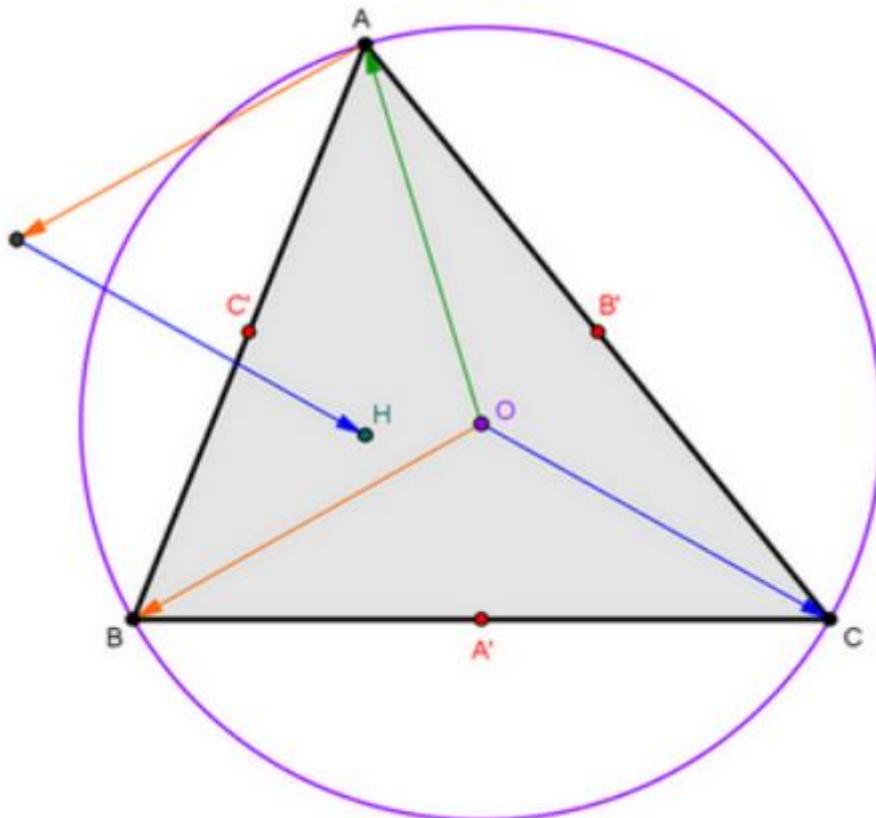
1. Montrer que  $\vec{OB} + \vec{OC} = 2\vec{OA}'$  puis en utilisant la relation (1) en déduire que  $\vec{AH} = 2\vec{OA}'$
2. En déduire par un même raisonnement que  $\vec{BH} = 2\vec{OB}'$  et que  $\vec{CH} = 2\vec{OC}'$
3. Montrer successivement que :
  - la droite (AH) est perpendiculaire à la droite (BC)
  - la droite (BH) est perpendiculaire à la droite (AC)
  - la droite (CH) est perpendiculaire à la droite (AB)
4. En déduire que les 3 hauteurs de ce triangle sont concourantes en ce point H

**PARTIE B**

Soit le point G défini par la relation  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

- 1) Montrer successivement que  $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AA}'$  et que  $\vec{BG} = \frac{2}{3}\vec{BB}'$  et que  $\vec{CG} = \frac{2}{3}\vec{CC}'$
- 2) En déduire que les **3 médianes du triangle** sont concourantes en ce point G  
( qu'on nomme : le centre de gravité du triangle ABC )
- 3) Montrer que pour tout point M du plan :  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$

- 4) En déduire que  $\vec{OH} = 3\vec{OG}$
- 5) En déduire que les points O et G et H sont alignés et compléter le dessin en traçant les 3 médianes et les 3 hauteurs du triangle ABC ainsi que le point G
- 6) Puis tracer la droite qui passe par les 3 points O et G et H ( droite qui est appelée : la droite D'Euler )

**ANNEXE***Compléter le dessin ci-dessous***QUESTION BONUS***( cette démonstration est une question du cours sur les médiatrices.. )*

Montrer les 3 médiatrices des 3 segments [BC] et [AC] et [AB] sont concourantes en un point O et montrer que ce point O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC