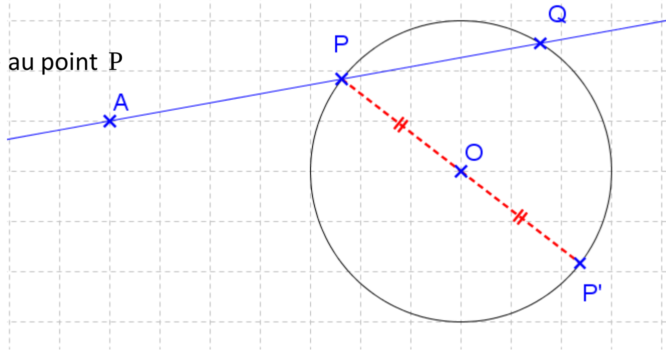
Exercice sur le produit scalaire : « Puissance d'un point par rapport à un cercle » (CORRECTION)

Enoncé

Soit un cercle $\mathscr{C}$ quelconque de centre le point $\mathbf{O}$ et de rayon $\mathbf{r}$

et soit un point A « *qui extérieur au cercle* $\mathscr{C}$ »

et soit une droite (***quelconque***) qui passe par A ***et qui coupe le cercle en 2 points*** P ***et*** Q



Enfin soit le point P' du cercle $\mathscr{C}$ qui est diamétralement opposé au point P

(le segment [P , P'] est un diamètre du cercle $\mathscr{C}$)

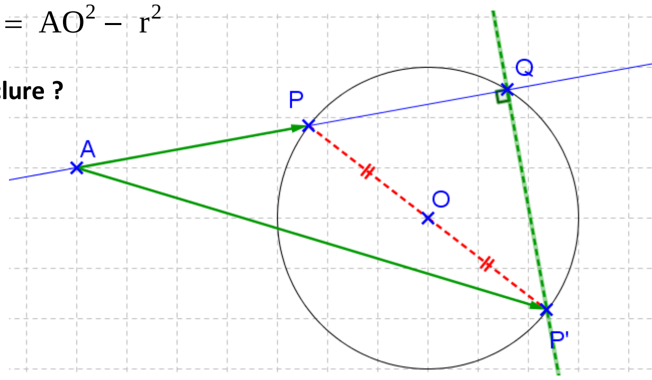
Voici une figure « possible » de cet énoncé

Questions

1) Montrer que $\vec{AP} \cdot \vec{AQ} = \vec{AP} \cdot \vec{AP'}$

2) En utilisant la relation de Chasles : Montrer que $\vec{AP} \cdot \vec{AP'} = AO^2 - r^2$

3) En déduire que $\vec{AP} \cdot \vec{AQ} = AO^2 - r^2$ **. Que peut-on conclure ?**



Réponses

Le segment $[P , P']$ est un diamètre du cercle $\mathscr{C}$

donc pour tout point $M \in \mathscr{C}$ on a : $\vec{MP} \perp \vec{MP'}$

et comme $Q \in \mathscr{C}$ on a $\vec{QP} \perp \vec{QP'}$:

1) De plus on sait que les 3 points A , P et Q sont alignés donc les 2 vecteurs $\vec{AP}$ et $\vec{QP}$ sont colinéaires

donc si $\vec{QP} \perp \vec{QP'}$ alors on a également $\vec{AP} \perp \vec{QP'}$

donc la projection orthogonale du vecteur $\vec{AP'}$ sur le vecteur $\vec{AP}$ est le vecteur $\vec{AQ}$

et donc on a $\vec{AP} \cdot \vec{AP'} = \vec{AP} \cdot \vec{AQ}$

AUTRE DEMO : Par calcul sur le produit scalaire on a

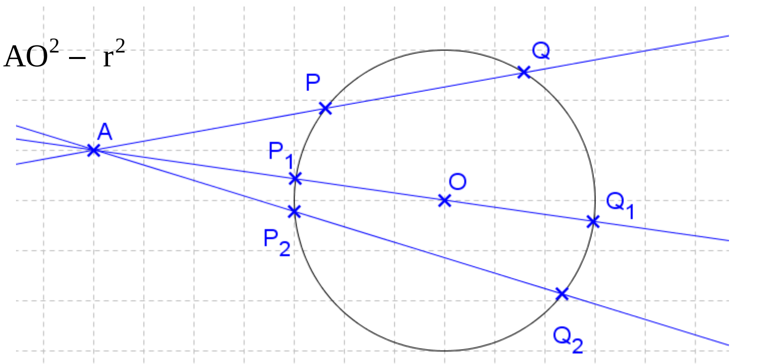
$$\vec{AP} \cdot \vec{AQ} = \vec{AP} \cdot \left(\vec{AP'} + \vec{P'Q} \right) = \vec{AP} \cdot \vec{AP'} + \underbrace{\vec{AP} \cdot \vec{P'Q}}_{=0} = \vec{AP} \cdot \vec{AP'}$$

2) Calculons $\vec{AP} \cdot \vec{AP'}$ en introduisant le point O par « *Chasles* » sachant que $\vec{OP} = -\vec{OP'}$ et $OP = r$

$$\vec{AP} \cdot \vec{AP'} = \left(\vec{AO} + \vec{OP} \right) \cdot \left(\vec{AO} + \vec{OP'} \right) = \vec{AO}^{\,2} + \vec{AO} \cdot \underbrace{\left(\vec{OP} + \vec{OP'} \right)}_{= \vec{0}} + \underbrace{\vec{OP} \cdot \vec{OP'}}_{= -r^2} = \vec{AO}^{\,2} - \vec{OP}^{\,2} = AO^2 - r^2$$

3) **Conclusion** : Ce produit scalaire ne dépend PAS DE LA DROITE qui passe A et qui coupe le cercle $\mathscr{C}$ en 2 points P et Q et on a :

$$\vec{AP} \cdot \vec{AQ} = \vec{AP_1} \cdot \vec{AQ_1} = \vec{AP_2} \cdot \vec{AQ_2} = AO^2 - r^2$$



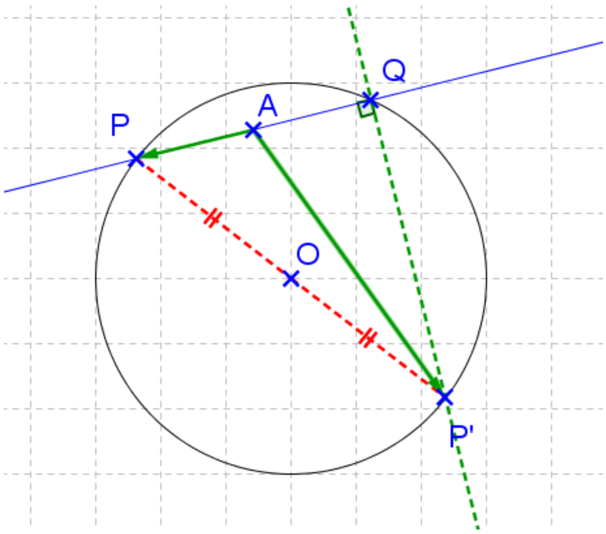
Le produit scalaire $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = AO^2 - r^2$ ne dépend que de la position du point A par rapport au cercle $\mathscr{C}$ et du rayon r de ce cercle $\mathscr{C}$
ET IL NE DEPEND PAS DES 2 POINTS P et Q **, *donc de la droite….***

Le nombre $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = AO^2 - r^2$ est appelé « puissance du point A par rapport au cercle $\mathscr{C}$ »

<u>Remarque n° 1</u> : Si le point A « est à l'in*térieur du cercle* $\mathscr{C}$ »

Alors ce nombre est négatif :

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP'} = AO^2 - r^2 \leq 0$$



<u>Remarque n° 2</u> : Si la droite qui passe par le point A est tangente au cercle $\mathscr{C}$
alors si on pose dans la formule précédente $P = Q$ on obtient la formule :

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP'} = AO^2 - r^2$$

On peut « *facilement démontrer* » cette formule car la droite (AP) est tangente au cercle $\mathscr{C}$ au point P

et d'après une propriété du cercle : on sait que $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{OP}$

et donc on a bien $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP}^2 = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP'} = AO^2 - r^2$