8 Probabilités

8-1 Généralités

Lors d'une expérience aléatoire :
• L'univers Ω est l'ensemble des résultats possibles.
• Un événement A est une partie de l'univers.
• Un événement élémentaire est un événement ne comportant qu'un seul élément.
• L'événement contraire de l'événement A est l'événement noté $\overline{A}$ formé de tous les éléments de Ω n'appartenant pas à A.
• L'événement $A \cap B$ (noté aussi «A et B») est l'événement formé des éléments de Ω appartenant à A et à B.
• L'événement $A \cup B$ (noté aussi «A ou B») est l'événement formé des éléments de Ω appartenant au moins à l'un des événements A ou B.
• Deux événements A et B sont dits incompatibles si $A \cap B = \varnothing$.
• Si $\Omega = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ et si à chaque résultat possible e_i on associe un nombre $p(e_i)$ tel que $0 \leqslant p(e_i) \leqslant 1$ et $p(e_1) + p(e_2) + \cdots + p(e_n) = 1$, on dit que l'on a défini une loi de probabilité sur Ω.
• La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

Pour tous événements A et B :

• $p(\varnothing) = 0$; $\quad p(\Omega) = 1$

• $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$; $\quad p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$; $\quad p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
(si A et B sont incompatibles, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$)

• Dans le cas de l'équiprobabilité, $p(A) = \dfrac{\text{nb d'éléments de A}}{\text{nb d'éléments de } \Omega} = \dfrac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb de cas possibles}}$

► *Exemple :* Tirage au hasard d'une carte dans un jeu de 32 cartes avec les événements :

$p(\text{la carte tirée est un roi }) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$ $\qquad$ $p(\text{la carte tirée est un coeur }) = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$

$p(\text{la carte tirée est un roi } \underline{\text{et}} \text{ un coeur }) = \dfrac{1}{32}$ $\qquad$ $p(\text{la carte tirée est un roi } \underline{\text{ou}} \text{ un coeur }) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{32} = \dfrac{11}{32}$

8-2 Probabilités conditionnelles

DÉFINITION

Etant donné deux événements A et B ($B \neq \varnothing$) d'un univers Ω :
• On appelle probabilité de B sachant A, le réel noté $p_A(B)$ tel que $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$

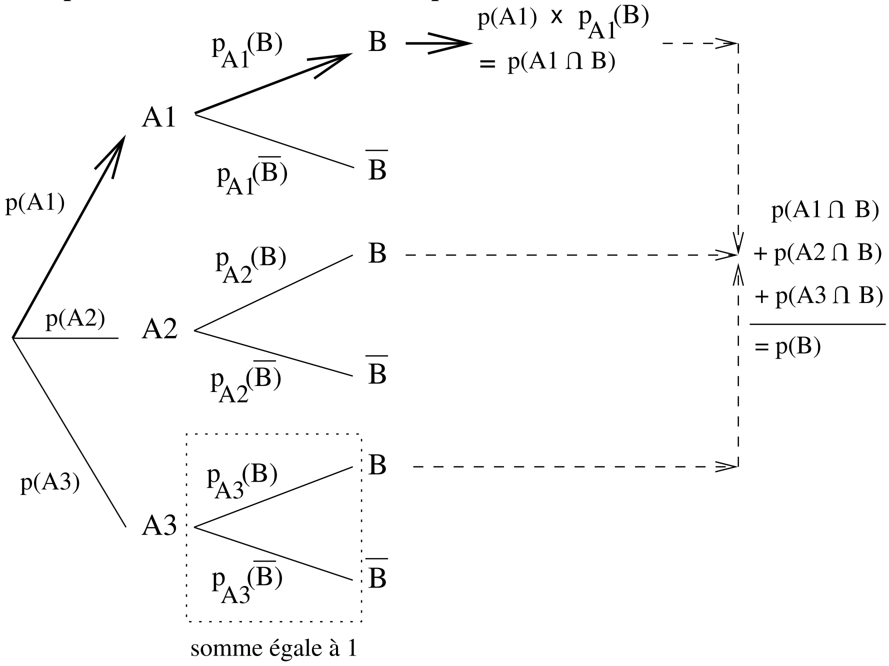
PROPRIÉTÉ

Pour tous événements non vides A et B :
• $0 \leqslant p_A(B) \leqslant 1$; $\quad p_A\left(\overline{B}\right) = 1 - p_A(B)$
• Dans le cas de l'équiprobabilité, $p_A(B) = \dfrac{\text{nb de cas favorables pour } A \cap B}{\text{nb de cas favorables pour A}}$
• $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = p(B) \times p_B(A)$

PROPRIÉTÉ

Formule des probabilités totales
Si A_1, A_2, $\cdots$, A_n sont des événements non vides deux à deux incompatibles et dont l'union est égale à Ω (on dit alors qu'ils forment une partition de l'univers) alors pour tout événement B :
• $p(B) = p(A_1 \cap B) + \cdots + p(A_n \cap B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + \cdots + p(A_n) \times p_{A_n}(B)$

► **Représentation à l'aide d'un arbre pondéré**

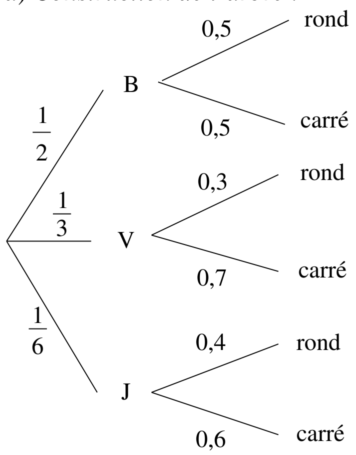


► **Règles de construction et d'utilisation des arbres pondérés :**

• Sur les premières branches, on inscrit les $p(A_i)$.
• Sur les branches du type $A_i \longrightarrow B$, on inscrit $p_{A_i}(B)$.
• Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin.
• La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).
• La probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à E.

► *Exemple :* Un sac contient des jetons de trois couleurs, la moitié de blancs, le tiers de verts et le sixième de jaunes. 50% des jetons blancs, 30% des jetons verts et 40% des jetons jaunes sont ronds. Tous les autres jetons sont carrés. On tire au hasard un jeton.

a) Construction de l'arbre :



b) Sachant que le jeton tiré est blanc, quelle est la probabilité pour qu'il soit carré ?
La lecture directe de l'arbre nous donne que $p_B(C) = 0,5$.
c) Quelle est la probabilité pour que le jeton tiré soit rond ?
$p(R) = \frac{1}{2} \times 0,5 + \frac{1}{3} \times 0,3 + \frac{1}{6} \times 0,4 = \frac{5}{12}$.
d) Sachant qu'il est rond, quelle est la probabilité pour qu'il soit blanc ?
$p_R(B) = \frac{p(B \cap R)}{p(R)} = \frac{\frac{1}{2} \times 0,5}{\frac{5}{12}} = \frac{3}{5}$.