# COMPOSITION DE DEUX FONCTIONS

## DONNÉES

Soient $f$ une fonction dont l'ensemble de définition est $D_f$ et $g$ une fonction dont l'ensemble de définition est $D_g$.

## DÉFINITION

On note $g \circ f$ la fonction définie par $g(f(x))$.

Exemples :

1) Si $f$ et $g$ sont deux fonctions définies (sur $\mathbb{R}$) par $f(x) = x + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$, alors on a :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 - 1 = (x + 1)^2 - 1 = x^2 + 2x$$

2) Si $f$ et $g$ sont deux fonctions définies par : $f(x) = x + 1$ ($D_f = \mathbb{R}$) et $g(x) = \dfrac{1}{x}$ ($D_g = \mathbb{R}^*$), alors on a :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x+1}$$

Dans ce deuxième exemple, l'ensemble de définition de $g \circ f$ (ici $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$) est différent de ceux de $f$ et $g$.

## ENSEMBLE DE DÉFINITION DE LA FONCTION g o f

À quelle(s) condition(s) sur $x$ peut-on calculer $g(f(x))$ ?

Déjà, il faut que $x \in D_f$ (pour que $f(x)$ soit calculable)

Ensuite, il faut que les valeurs $f(x)$ (obtenues pour $x \in D_f$) soient dans l'ensemble $D_g$ pour que $g(f(x))$ soit calculable.

Donc $g \circ f$ est définie pour les valeurs de $x$ telles que :

$$\boxed{x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g}$$

Exemple :

On donne $f(x) = \sqrt{x+3}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$. Trouver l'ensemble de définition de $g \circ f$ (sans calculer $g \circ f$).

On a $D_f = [-3 ; +\infty[$ et $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

La fonction $g \circ f$ est définie si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- $x \in D_f$, c'est-à-dire $x \in [-3 ; +\infty[$
- $f(x) \in D_g$, c'est-à-dire $\sqrt{x+3} \neq 1$, soit $x + 3 \neq 1$, $x \neq -2$.

En conclusion, l'ensemble de définition de $g \circ f$ est $[-3 ; -2[ \cup ]-2 ; +\infty[$.

## NOTATION

On note $f(I)$ l'ensemble des valeurs $f(x)$ où $x \in I$.

## THÉORÈME : sens de variation de g o f

Si $f$ est **croissante** sur un intervalle $I$ et si $g$ est **croissante** sur l'intervalle $f(I)$ alors $g \circ f$ est **croissante** sur $I$.

Si $f$ est **décroissante** sur un intervalle $I$ et si $g$ est **décroissante** sur l'intervalle $f(I)$ alors $g \circ f$ est **croissante** sur $I$.

Si $f$ est **croissante** sur un intervalle $I$ et si $g$ est **décroissante** sur l'intervalle $f(I)$ alors $g \circ f$ est **décroissante** sur $I$.

Si $f$ est **décroissante** sur un intervalle $I$ et si $g$ est **croissante** sur l'intervalle $f(I)$ alors $g \circ f$ est **décroissante** sur $I$.

## EXEMPLES ET ILLUSTRATIONS

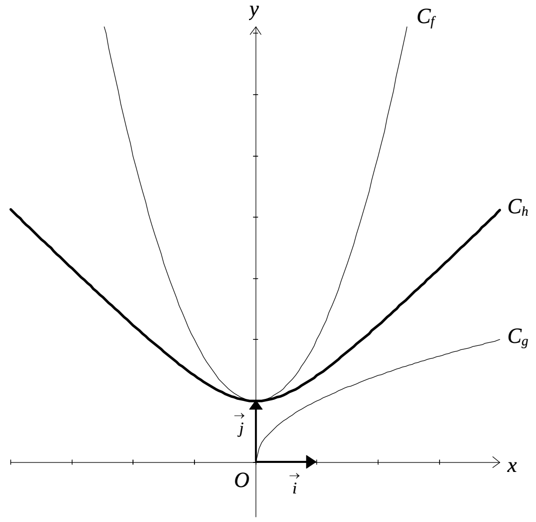
1) Étudier le sens de variation de la fonction $h$ définie par : $h(x) = \sqrt{1+x^2}$ .

   On décompose $h$ de la façon suivante : $h = g \circ f$ où $f(x) = 1 + x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$ .

   La fonction $f$ est **décroissante** sur $\mathbb{R}^-$ et la fonction $g$ est **croissante** sur $f(\mathbb{R}^-) = ]1 ; +\infty[$, donc $h$ est **décroissante** sur $\mathbb{R}^-$.

   La fonction $f$ est **croissante** sur $\mathbb{R}^+$ et la fonction $g$ est **croissante** sur $f(\mathbb{R}^+) = ]1 ; +\infty[$, donc $h$ est **croissante** sur $\mathbb{R}^+$.

   Illustration :




2) Étudier le sens de variation de la fonction $h$ définie par : $h(x) = \sqrt{1-x}$

   Notons que l'ensemble de définition de $h$ est $]-\infty ; 1]$, donc l'étude des variations de $h$ se fera sur $]-\infty ; 1]$.

   On décompose $h$ de la façon suivante : $h = g \circ f$ où $f(x) = 1 - x$ et $g(x) = \sqrt{x}$ .

   La fonction $f$ est toujours **décroissante** (c'est une fonction affine de coefficient directeur négatif). De plus, l'image de l'intervalle $]-\infty ; 1]$ par $f$ est $\mathbb{R}^+$ et la fonction $g$ est **croissante** sur $\mathbb{R}^+$. Donc $h$ est **décroissante** sur $]-\infty ; 1]$.

   Illustration :