DERIVATION d'une fonction composée de 2 fonctions

III) Dérivation dûne fonction composée de 2 fonctions réelles

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$
et soit f une fonction dérivable sur un intervalle J tel que $u(I) \subset J$

alors la fonction composée $f \circ u$ est dérivable sur lûntervalle I et : $(f \circ u)' = (f' \circ u) \times u'$

Formule à retenir par cî ur : $\boxed{\forall x \in I \ \ (f \circ u)'(x) = f'[u(x)] \times u'(x)}$

*(la démonstration de cette formule se **trouve en annexe page 5** du document. Vous trouverez **en annexe page 6** le calcul de la dérivée de la fonction réciproque quand **f** est une bijection (hors programme))*

Exemples :

1ier exemple : Soit la fonction $h : x \mapsto (ax+b)^2$

On pose $u(x) = ax+b$ **et** $f(x) = x^2$

Comme les fonctions f et u sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$
la fonction $h = f \circ u$ est définie sur $\mathbb{R}$ et est dérivable sur $\mathbb{R}$

Comme **:** $\forall x \in \mathbb{R} \ \ f'(x) = 2x$ **et** $u'(x) = a$

on obtient : $h'(x) = f'[u(x)] \times u'(x) = 2[ax+b] \times a = 2a(ax+b)$

2ième exemple : Soit la fonction $h : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$

On pose $u(x) = 1+x^2$ **et** $f(x) = \sqrt{x}$

Comme la fonction u est définie sur $\mathbb{R}$ et que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^+ = [0;+\infty[$

ET comme $\forall x \in \mathbb{R} \ \ u(x) = 1+x^2 \geq 0$, la fonction h est définie sur $\mathbb{R}$

Comme la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R} \ \ u'(x) = 2x$

Comme la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*} =]0;+\infty[$: $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \ \ f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

ET comme $\forall x \in \mathbb{R} \ \ u(x) = 1+x^2 > 0$, la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$

On obtient : $h'(x) = f'[u(x)] \times u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \times 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

IV) Etude du sens de variation de la fonction composée $f \circ u$

1) Si u est **croissante** sur un intervalle **I** et si f est **croissante** sur l'intervalle u**(I)** alors $f \circ u$ est **croissante** sur I
2) Si u est **décroissante** sur un intervalle **I** et si f est **décroissante** sur l'intervalle u**(I)** alors $f \circ u$ est **croissante** sur I
3) Si u est **croissante** sur un intervalle **I** et si f est **décroissante** sur l'intervalle u**(I)** alors $f \circ u$ est **décroissante** sur I
4) Si u est **décroissante** sur un intervalle **I** et si f est **croissante** sur l'intervalle u**(I)** alors $f \circ u$ est **décroissante** sur I

Remarque : Ces différentes propriétés se démontrent très facilement en utilisant la formule :

$\boxed{\forall x \in I \ \ (f \circ u)'(x) = f'[u(x)] \times u'(x)}$

ET en étudiant le signe de $(f \circ u)'(x)$ quand $x \in I$ en fonction des signes de $f'[u(x)]$ et de $u'(x)$

V) Application : calculs de fonctions dérivées en utilisant cette formule

1$^{\text{iere}}$ application : Soit ***u*** une fonction non nulle et dérivable sur un intervalle ***I***

alors la fonction ***f*** définie par $\forall x \in I \quad f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ est dérivable sur lõintervalle ***I***

et on a : $\forall x \in I \quad f'(x) = \dfrac{-u'(x)}{u^2(x)}$ Formule à connaître par cî ur : $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$

Exemple : $f(x) = \dfrac{1}{(x^2-4)}$

Cette fonction est définie et dérivable sur $]-\infty;-2[\cup]-2;2[\cup]2;+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2-4)^2}$

2$^{\text{ième}}$ application : Soit ***u*** une fonction dérivable sur un intervalle ***I***

alors la fonction ***f*** définie par $\forall x \in \mathrm{I} \quad f(x) = u^n(x)$ (**avec n** $\in \mathbb{N}^*$) est dérivable sur lõintervalle ***I***

et on a : $\forall x \in \mathrm{I} \quad f'(x) = nu^{(n-1)}(x) \times u'(x)$

Remarque : Cette formule est valable avec un exposant entier négatif si et seulement si la fonction ***u*** est une fonction non nulle dérivable sur lõintervalle ***I***

Exemple 1 :

$$f(x) = (\underset{u}{3x+4})^{\underset{n}{9}}$$

$$f'(x) = \underset{n}{9} \times \underset{u'}{3}(\underset{u}{3x+4})^{\underset{n-1}{8}} = 27(3x+4)^8$$

Exemple 2 :

$$f(x) = \sin^5 x = (\underset{u}{\sin x})^{\underset{n}{5}}$$

$$f'(x) = \underset{n}{5} \times \underset{u'}{\cos x}(\underset{u}{\sin x})^{\underset{n-1}{4}} = 5\cos x \sin^4 x$$

Exemple 4 : avec un exposant négatif

$$f(x) = \frac{1}{(4x^2+5x-3)^{10}}$$

transformation en forme u^n

$$f(x) = (4x^2+5x-3)^{-10}$$

$$f'(x) = -10(8x+5)(4x^2+5x-3)^{-10-1}$$

$$= -10(8x+5)(4x^2+5x-3)^{-11}$$

$$= \frac{-10(8x+5)}{(4x^2+5x-3)^{11}}$$

écriture sans exposant négatif

3$^{\text{ième}}$ application : Soit ***u*** une fonction positive non nulle sur un intervalle ***I***

alors la fonction ***f*** définie par $\forall x \in I \quad f(x) = \sqrt{u(x)}$ est définie et dérivable sur lõintervalle ***I***

et on a : $\forall x \in I \quad f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ Formule à connaître par cî ur : $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$