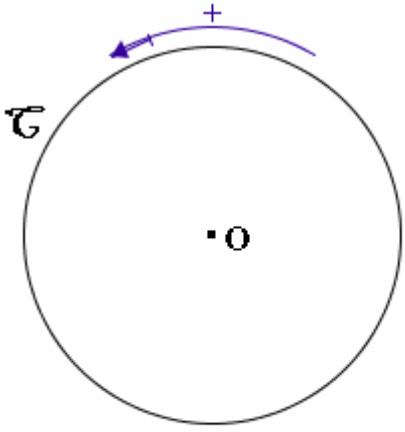
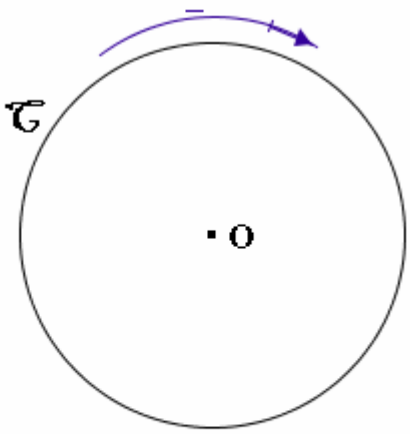
I) Orientation

☻ Orienter un cercle $\mathcal{C}$ veut dire choisir un sens de parcours sur ce cercle.Il y a exactement deux sens :



Sens direct ou sens positif



Sens indirect ou sens négatif ou sens rétrograde

☻ Orienter le plan veut dire choisir la même orientation pour tous les cercles de ce plan.

☻ Un cercle trigonométrique est un cercle orienté dans le sens direct, son rayon est égal à1 et son centre est l'origine du repère orthonormé du plan.

Dans toute la suite de la leçon le plan est orienté dans le sens direct.

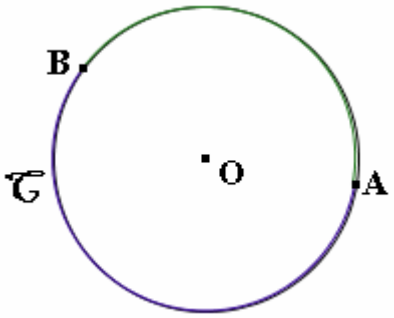
II) Arcs orientés

Définition

Deux points A et B d'un cercle $\mathcal{C}$ définissent deux arcs d'origine A et d'extrémité B.

Un seul arc a une orientation conforme à celle du cercle $\mathcal{C}$, on l'appelle arc orienté et on le note $\overset{\curvearrowright}{AB}$

Si A et B sont confondus alors $\overset{\curvearrowright}{AB}$ est appelé l'arc nul.



III) Mesure d'un arc orienté

Définition

Soit A et B deux points du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ et ℓ la longueur de l'arc géométrique $\overset{\frown}{AB}$ associé à l'arc orienté $\overset{\curvearrowright}{AB}$

On appelle mesure en radians de l'arc orienté $\overset{\curvearrowright}{AB}$ tout réel de la forme $\ell + 2k\pi$ où $k \in Z$.

On écrit $mes(\overset{\curvearrowright}{AB}) \equiv \ell\ [2\pi]$.

www.boufaresmaths.net

Théorème

Pour tous points A, B et C du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ on a :

► Deux réels x et y sont deux mesures d'un même arc $\overset{\curvearrowright}{AB}$ si et seulement si $x \equiv y\ [2\pi]$

► $mes(\overset{\curvearrowright}{AB}) \equiv -mes(\overset{\curvearrowright}{BA})\ [2\pi]$

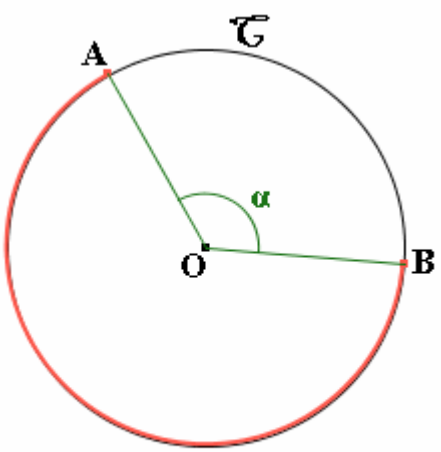
► $mes(\overset{\curvearrowright}{AB}) \equiv mes(\overset{\curvearrowright}{AC}) + mes(\overset{\curvearrowright}{CB})\ [2\pi]$ c'est la relation de Chasles

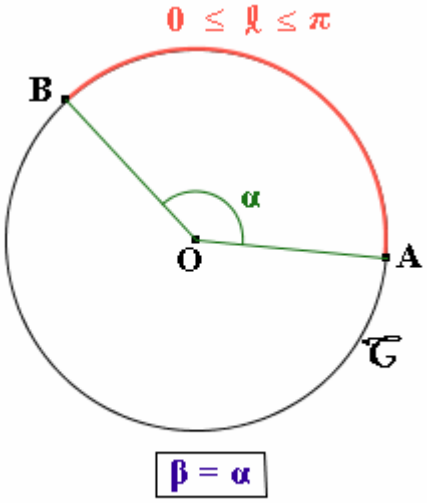
IV) Mesure principale d'un arc orienté

Théorème

Tout arc orienté $\overset{\curvearrowright}{AB}$ admet une unique mesure β dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$ appelé mesure principale de $\overset{\curvearrowright}{AB}$

Soit ℓ la longueur de l'arc géométrique associé à $\overset{\curvearrowright}{AB}$ et α la valeur de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ alors β est défini par :





$\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique.

V) Angles orientés de deux vecteurs non nuls

Définition 1

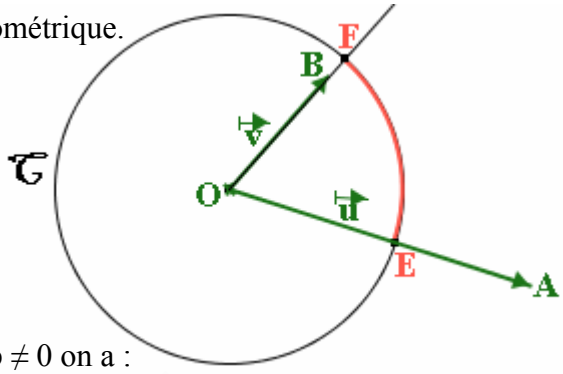
On appelle angle orienté de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le couple $(\vec{u},\vec{v})$.

Définition 2

Soit $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ deux vecteurs non nuls et $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique.

On appelle mesure de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$ toute mesure de l'arc orienté $\overset{\frown}{EF}$. On la note $(\hat{\vec{u}},\hat{\vec{v}})$.

On appelle mesure principale de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$ la mesure principale de l'arc orienté $\overset{\frown}{EF}$.



Théorème 1

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ et pour tous réels α, $a\neq 0$ et $b\neq 0$ on a :

► Il existe un seul vecteur unitaire $\vec{x}$ tel que $(\hat{\vec{u}},\hat{\vec{x}})\equiv\alpha\,[2\pi]$

► $(\hat{\vec{u}},\hat{\vec{u}})\equiv 0\,[2\pi]$

► $(\hat{\vec{u}},\hat{\vec{v}})\equiv(\hat{\vec{u}},\hat{\vec{w}})+(\hat{\vec{w}},\hat{\vec{v}})\,[2\pi]$ c'est la relation de Chasles.

► $(\hat{\vec{u}},\hat{\vec{v}})\equiv -(\hat{\vec{v}},\hat{\vec{u}})\,[2\pi]$

► $(\hat{a\vec{u}},\hat{b\vec{v}})\equiv(\hat{\vec{u}},\hat{\vec{v}})\,[2\pi]$ si $ab>0$

► $(\hat{a\vec{u}},\hat{b\vec{v}})\equiv\pi+(\hat{\vec{u}},\hat{\vec{v}})\,[2\pi]$ si $ab<0$

► $(\hat{\vec{u}},\hat{\vec{v}})=k\pi, k\in Z\Leftrightarrow\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

► $(\hat{\vec{u}},\hat{\vec{v}})=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z\Leftrightarrow\vec{u}\perp\vec{v}$

► $(\hat{\vec{u}},\hat{\vec{w}})\equiv(\hat{\vec{v}},\hat{\vec{w}})\,[2\pi]\Leftrightarrow\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens

Théorème 2

► Toute translation conserve les mesures des angles orientés

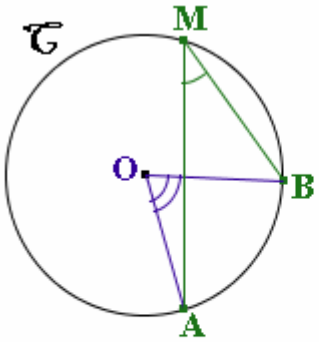
► Toute symétrie axiale change les mesures des angles orientés en leurs opposées

www.boufaresmaths.net

VI) Angles inscrits et angles au centre

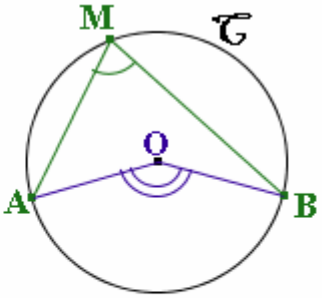
Définition

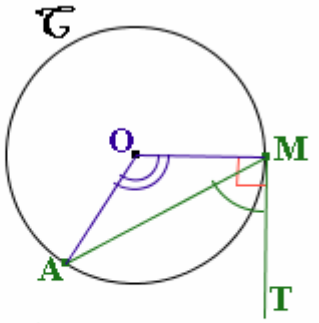
On dit qu'un angle est inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ si son sommet appartient à $\mathcal{C}$ et ses cotés recoupent $\mathcal{C}$. L'un de ses cotés peut être tangent à $\mathcal{C}$.



$\widehat{AMB}$ est un angle inscrit

$\widehat{AOB}$ est l'angle au centre associé à $\widehat{AMB}$





$\widehat{AMT}$ est un angle inscrit

$\widehat{AOM}$ est l'angle au centre associé à $\widehat{AMT}$

♣ L'angle inscrit et l'angle au centre associé interceptent le même arc géométrique.

Théorème 1

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O.

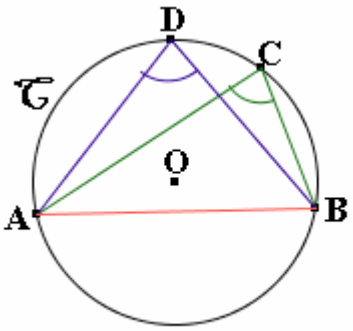
► Pour tous points distincts A, B et M de $\mathcal{C}$ on a $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) \equiv 2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})\,[2\pi]$

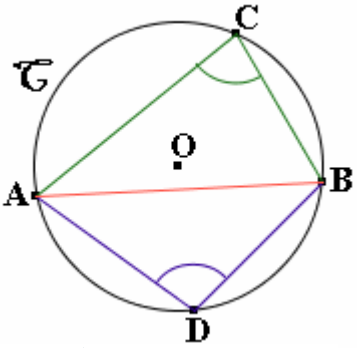
► Si (MT) est tangente à $\mathcal{C}$ en M alors $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}) \equiv 2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MT})\,[2\pi]$

www.boufaresmaths.net

Théorème 2

Pour tous points distincts A, B, C et D d'un cercle $\mathcal{C}$ on a $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}) + k\pi$ où $k \in Z$





VII) Ensemble des points M tels que : $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) \equiv \theta\,[2\pi]$

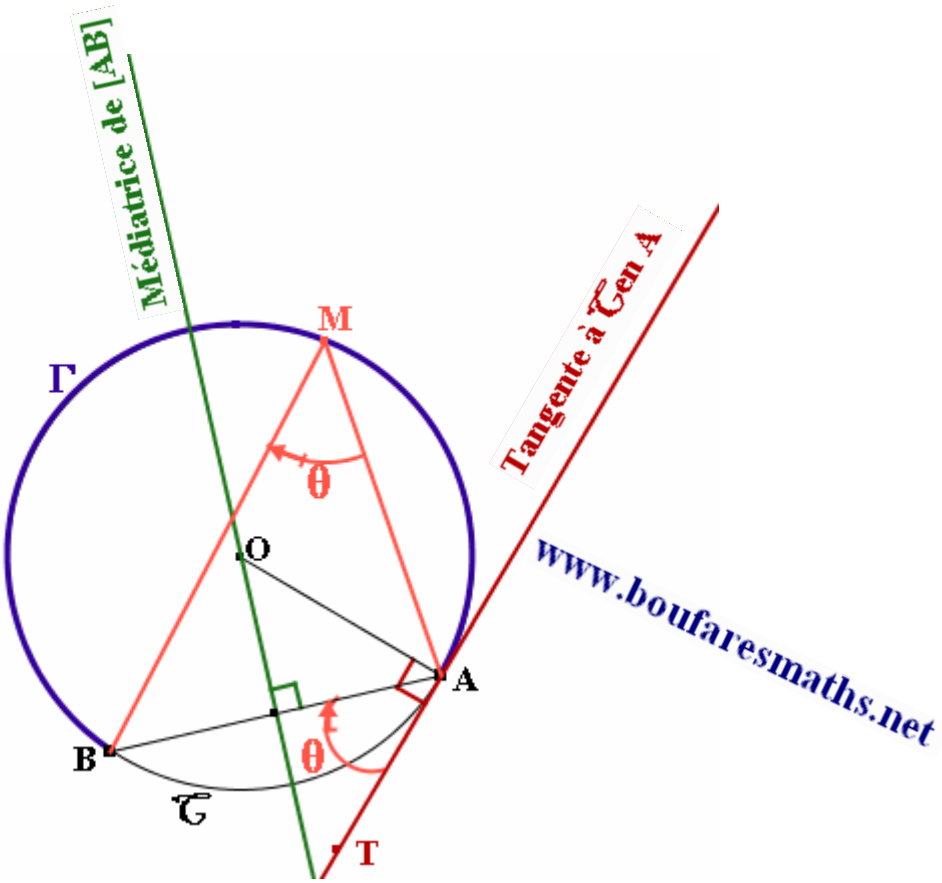
Théorème

Soit A et B deux points distincts du plan orienté dans le sens direct, θ un réel et T un point du plan tel que $(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}) \equiv \theta\,[2\pi]$.

► Il existe un seul cercle $\mathcal{C}$ passant par les points A et B et tangent à la droite (AT) en A

► L'ensemble des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) \equiv \theta\,[2\pi]$ est :

☻ (AB) \ [AB] si $\theta \equiv 0\,[2\pi]$

☻]AB[si $\theta \equiv \pi\,[2\pi]$

☻ L'arc Γ, du cercle $\mathcal{C}$, d'extrémités A et B privé des points A et B et situé dans le demi plan de frontière (AB) ne contenant pas le point T si $\theta \neq k\pi, k \in Z$.