Correction dâun exercice sur les angles orientés *(le 10 octobre 2013)*

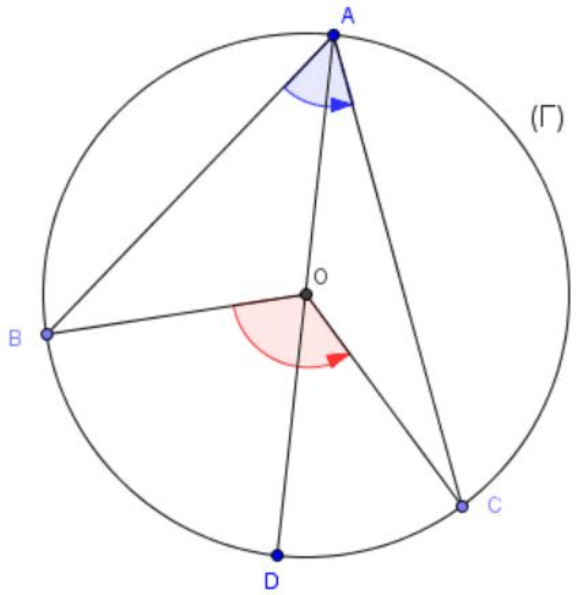
Exercice n° 7 (*Exercice relativement difficile sans lire les pistes de travail)*

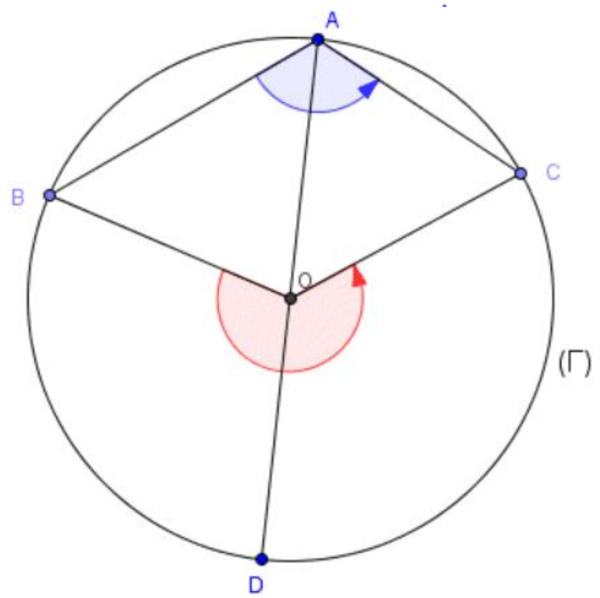
Soit A,B,C trois points d'un cercle (Γ) de centre O et D le point diamétralement opposé à A sur (Γ).

1. Démontrer que $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}) = 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO})$.

2. Démontrer que $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Cette dernière relation généralise une propriété utilisée au collège : l'angle au centre est double de l'angle inscrit interceptant le même arc de cercle.





Piste de travail question 1)

Il faut partir du fait que [A ; D] est un diamètre du cercle donc l'angle $\widehat{AOD}$ est un angle plat

et donc $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OD}\right) = \pi \quad [2\pi]$ (*)

et il faut décomposer cette relation (*) en utilisant la relation de Chasles sur les angles orientés avec les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ car le triangle OAB est isocèle en O

Piste de travail question 2)

Utiliser le résultat de la question 1 et le fait qu'on a aussi $\left(\overrightarrow{OD}\,;\overrightarrow{OC}\right) = 2\left(\overrightarrow{AO}\,;\overrightarrow{AC}\right)$

CORRECTION en page 2

1. ► MÉTHODE 1

On a : $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OD}) = \pi$

En décomposant avec la relation de Chasles, on obtient :

$$(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OD}) = \pi$$

Donc : $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OD}) = \pi - (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$

Le triangle ABO étant isocèle en O, on a : $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \pi - 2(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AO})$

En utilisant ce résultat avec la relation précédente, on obtient finalement :

$$(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OD}) = \pi - \left[\pi - 2(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AO})\right]$$

$$\boxed{(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OD}) = 2\ (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AO})}$$

► MÉTHODE 2

Le triangle ABD est inscrit dans le demi-cercle de diamètre [AD] donc ABD rectangle en B, on en tire :

$$(\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2}$$

En décomposant avec la relation de Chasles, on obtient :

$$(\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BO}) + (\overrightarrow{BO}; \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2}$$
$$(\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BO}) = \frac{\pi}{2} - (\overrightarrow{BO}; \overrightarrow{BA})$$

Or le triangle ABC est isocèle en O, donc $(\overrightarrow{BO}; \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AO})$, ce qui donne :

$$(\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BO}) = \frac{\pi}{2} - (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AO})$$

Le triangle BDO est isocèle en O, donc :

$$(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OD}) = \pi - 2(\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BO})$$
$$(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OD}) = \pi - 2\left[\frac{\pi}{2} - (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AO})\right]$$
$$\boxed{(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OD}) = 2(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AO})}$$

2. On démontre de la même manière : $(\overrightarrow{OD}; \overrightarrow{OC}) = 2(\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{AC})$.

Donc :

$$(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{OD}; \overrightarrow{OC})$$
$$(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}) = 2(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AO}) + 2(\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{AC})$$
$$(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}) = 2\left[(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AO}) + (\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{AC})\right]$$
$$\boxed{(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}) = 2(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})}$$