FICHE : Résumé sur le chapitre TRIGONOMETRIE

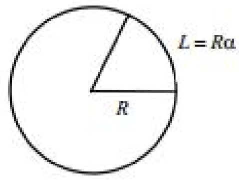
I) Le radian

Le radian est une unité de mesure des angles choisie de façon que l'angle plat (180°) mesure π radians.

Ainsi, un arc de cercle de rayon R et d'angle α (en radians) a pour longueur : $L = \alpha R$

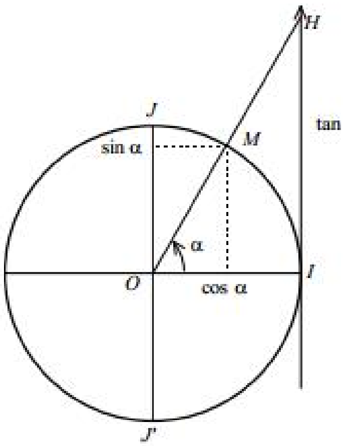
Le tableau de proportionnalité ci-dessous permet de convertir un angle de x degrés en un angle de α radians (ou inversement).

degrés	180	x
radians	π	α



Exemple : convertir 60° en radians : cela donne $\alpha = \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$ rad.

II) Cercle trigonométrique et définition du sinus, du cosinus et de la tangente



Munissons le plan d'un repère orthonormé (O ; I, J). Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens direct (sens contraire des aiguilles d'une montre). Soit M un point du cercle tel que α soit une mesure, en radians, de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right)$.

Définition du sinus et du cosinus :

On appelle cosinus et sinus de α, et on note cos α et sin α, les coordonnées du point M dans le repère (O ; I, J) : $\overrightarrow{OM} = (\cos\alpha)\overrightarrow{OI} + (\sin\ \alpha)\overrightarrow{OJ}$.

Définition de la tangente :

Soit Δ la droite (verticale) d'équation $x = 1$ dans le repère (O ; I, J) et H le point défini par $(OM) \cap \Delta$.

Ce point H existe dès lors que Δ et (OM) ne sont pas parallèles, c'est-à-dire dès que M n'est ni en $J(0\ ;\ 1)$, ni en $J'(0\ ;\ -1)$, c'est-à-dire dès que $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

On appelle tangente de α, et on note tan α, l'ordonnée du point H dans le repère (O ; I, J)

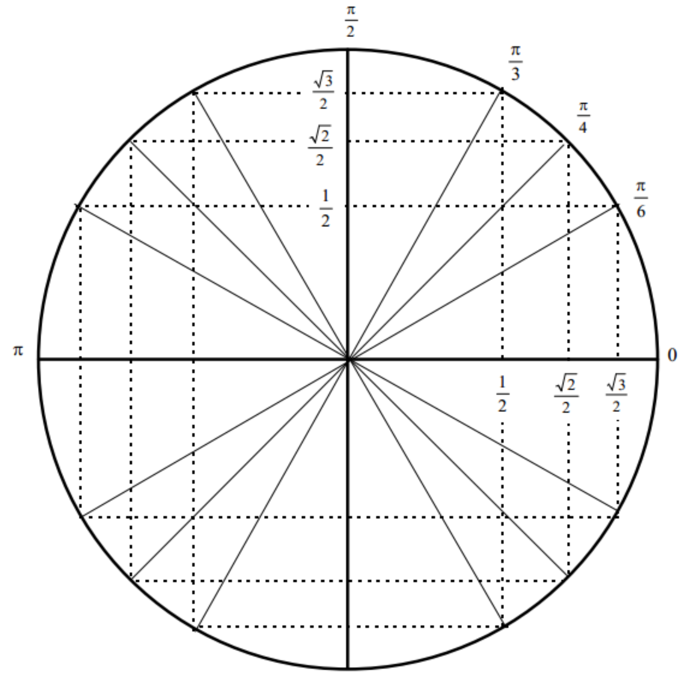
Le tableau ci-dessous rappelle les valeurs du sinus, du cosinus et de la tangente pour des valeurs particulières de l'angle α (en radians) :

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	NON DÉFINIE !

On a la formule $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (*qui est facile à démonter car* $\tan\alpha = \frac{\text{coté opposé}}{\text{coté adjacent}}$)

Propriétés élémentaires du sinus et du cosinus :

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$$
$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$$
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$
$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$$
$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$$

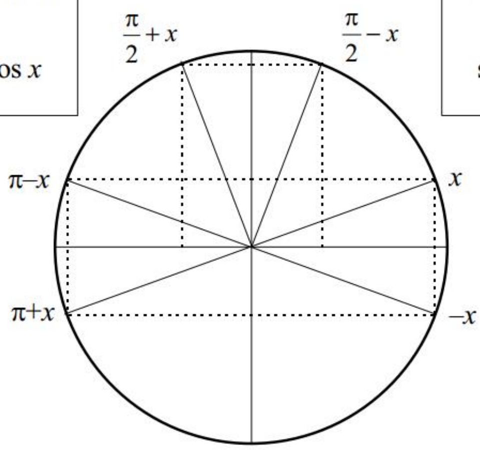


Une lecture efficace du cercle trigonométrique permet de retrouver(1) les relations suivantes :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x$$



$$\cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \sin(-x) = -\sin x$$

Résolution des équations $\cos x = a$ et $\sin x = a$ ($x \in \mathbb{R}$)

Si $a \notin [-1 ; 1]$ alors ces équations n'ont pas de solutions (car $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$)

Si $a \in [-1 ; 1]$, elles en ont une infinité :

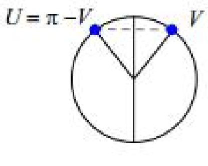
<u>Pour $\cos x = a$</u> : on résout déjà l'équation sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ en cherchant à l'aide du cercle trigonométrique les deux angles α et $-\alpha$ dont le cosinus vaut a. On trouve les autres solutions de l'équation en ajoutant les multiples de 2π.

$$\boxed{\cos x = a \iff x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = -\alpha + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}}$$

<u>Pour $\sin x = a$</u> : on résout déjà l'équation sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ en cherchant à l'aide du cercle trigonométrique les deux angles α et $\pi - \alpha$ dont le sinus vaut a. On trouve les autres solutions de l'équation en ajoutant les multiples de 2π.

$$\boxed{\sin x = a \iff x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \alpha + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}}$$

Résolution d'équations trigonométriques



$$\cos(U) = \cos(V) \iff (U = V\ [2\pi] \text{ ou } U = -V\ [2\pi])$$
$$\sin(U) = \sin(V) \iff (U = V\ [2\pi] \text{ ou } U = \pi - V\ [2\pi])$$
$$\tan(U) = \tan(V) \iff U = V\ [\pi]$$