

PRODUIT SCALAIRE

I Produit scalaire

Définition

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan.
On considère trois points O, A et B tels que :

$$\vec{OA} = \vec{u} \quad \text{et} \quad \vec{OB} = \vec{v}$$

On appelle produit scalaire du vecteur \vec{u} par le vecteur \vec{v} le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ tel que :

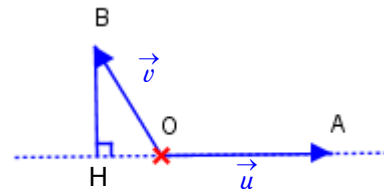
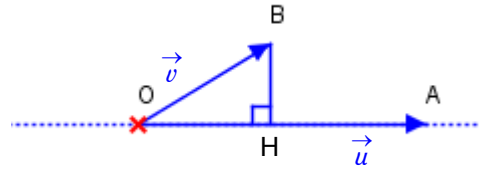
- si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$

Soit H le projeté orthogonal de B sur (OA)

Si \vec{OA} et \vec{OH} sont de même sens : $\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OH$

Si \vec{OA} et \vec{OH} sont de sens contraire : $\vec{u} \cdot \vec{v} = - OA \times OH$

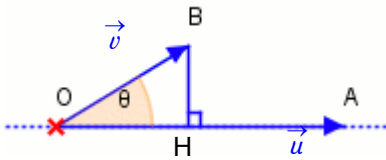
(voir [animation](#))



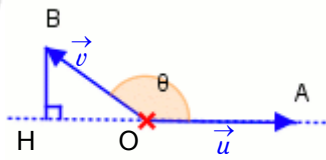
(voir [animation](#))

Remarques

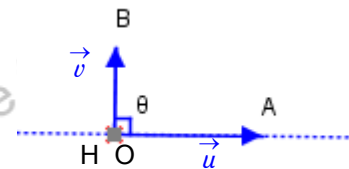
- Soit θ l'angle \widehat{AOB} , c'est-à-dire l'angle que forment les vecteurs \vec{u} et \vec{v} lorsqu'ils sont non nuls



Si θ est un angle aigu,
le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$
est positif

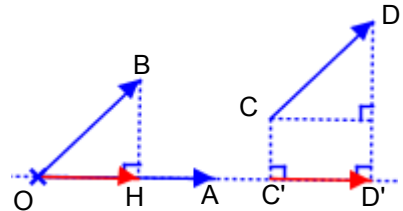


Si θ est un angle obtus,
le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$
est négatif

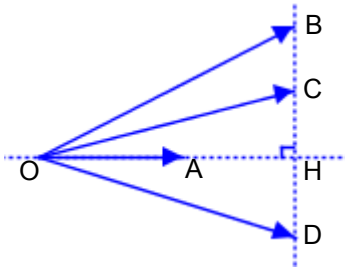


Si θ est un angle droit,
le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est nul
(H est confondu avec O)

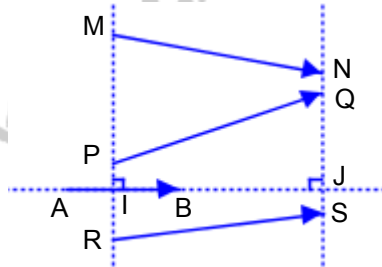
- Si C et D sont deux points tels que $\vec{CD} = \vec{OB}$, et si C' et D' sont les projetés orthogonaux de C et D sur (OA), alors $\vec{C'D'} = \vec{OH}$
On dit que $\vec{C'D'}$ est le projeté orthogonal de \vec{CD} sur (OA).



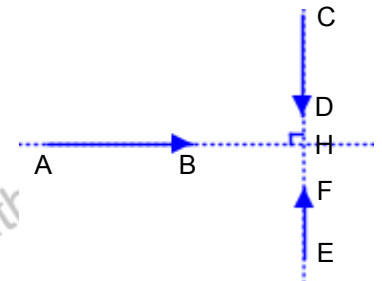
Configurations fondamentales



$$\begin{aligned} \vec{OA} \cdot \vec{OB} &= \vec{OA} \cdot \vec{OC} = \vec{OA} \cdot \vec{OD} \\ &= \vec{OA} \cdot \vec{OH} = OA \times OH \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{MN} &= \vec{AB} \cdot \vec{PQ} = \vec{AB} \cdot \vec{RS} \\ &= \vec{AB} \cdot \vec{IJ} = AB \times IJ \end{aligned}$$



$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot \vec{EF} = 0$$

Exercice 01 (voir [réponses et correction](#))

Soit ABCD un carré de centre O tel que $AB = a$. Déterminer en fonction de a les produits scalaires :
 $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$; $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$; $\vec{OC} \cdot \vec{OD}$; $\vec{AC} \cdot \vec{AO}$; $\vec{OC} \cdot \vec{OA}$; $\vec{AD} \cdot \vec{OB}$

Exercice 02 (voir [réponses et correction](#))

On considère un triangle OAB avec $OA = 5$; $OB = 3$ et $(\vec{OA}; \vec{OB}) = \theta \in [2\pi]$

Faire une figure et calculer le produit scalaire $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ pour $\theta = \frac{\pi}{3}$; $\theta = \frac{\pi}{4}$ et $\theta = \frac{5\pi}{6}$

Propriété (voir [démonstration 01](#))

Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} non nuls on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}; \vec{v})$

Remarques

- L'expression $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}; \vec{v})$ n'est pas vraiment fautive lorsque \vec{u} ou \vec{v} est nul, car l'une des deux normes est nulle (mais l'angle $(\vec{u}; \vec{v})$ n'existe pas).
- Le produit scalaire peut aussi s'exprimer avec un angle géométrique non orienté, puisqu'il ne fait intervenir que le cosinus de l'angle.

Propriété (voir [démonstration 02](#))

Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Exercice 03 (voir [réponses et correction](#))

Soit OAB un triangle.

On considère le point A', projeté orthogonal de A sur (OB) et B' projeté orthogonal de B sur (OA).

Montrer que $OA' \times OB = OA \times OB'$

Remarque

Si on exprime un produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en utilisant une projection orthogonale, on peut aussi bien projeter \vec{u} sur \vec{v} que \vec{v} sur \vec{u} .

Exercice 04 (voir [réponses et correction](#))

Calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ dans chacun des cas suivants :

1°) $AB = 3$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{6}$ 2°) $AB = 1$, $AC = 2$ et $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{2\pi}{3}$

3°) $BA = 2$, $CA = 2$ et $\widehat{CAB} = \frac{3\pi}{4}$ 4°) $BA = 3$, $CA = \sqrt{2}$ et $(\vec{AB}, \vec{CA}) = \frac{\pi}{4}$

Exercice 05 (voir [réponses et correction](#))

On considère un triangle équilatéral direct ABC tel que $AB = a$. Soit G son centre de gravité.

Soient A', B', C' les milieux respectifs des segments [BC], [AC], [AB].

Calculer les produits scalaires : $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$; $\vec{BG} \cdot \vec{BC}$; $\vec{GB} \cdot \vec{GA}$; $\vec{AC} \cdot \vec{BA'}$; $\vec{GA'} \cdot \vec{GB'}$

Propriété (voir [démonstration 03](#))

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul, c'est-à-dire : $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Propriété (voir [démonstration 04](#))

Pour tout vecteur \vec{u} , on a : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

Notation : le produit scalaire de \vec{u} par \vec{u} est noté \vec{u}^2 . On a donc $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

Propriété (voir [démonstration 05](#))

Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} et pour tout réel k on a : $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$

Propriété (voir [démonstration 06](#))

Pour tous vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{v}' on a : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{v}') = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v}'$

Propriété (voir [démonstration 07](#))

Pour tous vecteurs \vec{u} , \vec{u}' , \vec{v} , \vec{v}' et pour tous réels α , α' , β , β' , on a :
 $(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) \cdot (\alpha' \vec{u}' + \beta' \vec{v}') = \alpha \alpha' \vec{u} \cdot \vec{u}' + \alpha \beta' \vec{u} \cdot \vec{v}' + \beta \alpha' \vec{v} \cdot \vec{u}' + \beta \beta' \vec{v} \cdot \vec{v}'$

Remarque

En utilisant la propriété précédente, on peut justifier que :

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} ; (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} ; (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

On peut en déduire une expression du produit scalaire en fonction des normes :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [(\vec{u} + \vec{v})^2 - \vec{u}^2 - \vec{v}^2] = \frac{1}{2} [\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2]$$

Propriété (voir [démonstration 08](#))

Si $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal du plan, on a :

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \|\vec{i}\|^2 = 1 ; \vec{j} \cdot \vec{j} = \|\vec{j}\|^2 = 1 ; \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \text{ et } \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$$

Propriété (voir [démonstration 09](#))

Le plan est rapporté à un repère **orthonormal** $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soient $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$.

On a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Propriété (voir [démonstration 10](#))

Le plan est rapporté à un repère **orthonormal** $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soient $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$.

\vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si : $xx' + yy' = 0$.

Remarque

Ne pas confondre avec la condition de colinéarité : $xy' - yx' = 0$.

Exercice 06 (voir [réponses et correction](#))

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soient $\vec{u}(2; 1)$, $\vec{v}(3; -6)$, $\vec{w}(1; 3)$

1°) Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ que peut-on en déduire pour les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ?

2°) Calculer $\vec{u} \cdot \vec{w}$; $\|\vec{u}\|$; $\|\vec{w}\|$. Que peut-on en déduire pour l'angle $(\vec{u}; \vec{w})$?

Exercice 07 (voir [réponses et correction](#))

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les points A(1; -1) B(3; 3) C(-4; 4) D(2; 1)

Montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Exercice 08 (voir [réponses et correction](#))

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points A(1; 2) et B(3; -5).

1°) Déterminer (par deux méthodes différentes) une équation de la médiatrice de [AB].

2°) Déterminer une équation de la droite passant par C(0; 3) et perpendiculaire à (AB).

Exercice 09 (voir [réponses et correction](#))

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les points A(-3; -1), B(2; 1) et C(1; 4).

1°) Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$. En déduire une valeur approchée de la mesure en degrés de l'angle \widehat{BAC} .

2°) Déterminer de même des valeurs approchées des mesures en degrés des angles \widehat{ACB} et \widehat{CBA} .

Vérifier en calculant la somme des mesures des trois angles.

Exercice 10 (voir [réponses et correction](#))

A, B, C et D sont quatre points quelconques du plan.

Démontrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

Exercice 11 (voir [réponses et correction](#))

Le plan est rapporté à un repère orthonormal. k est un réel.

Soit $\vec{u}(k; -5)$ et $\vec{v}(2k - 1; k + 4)$. Existe-t-il des valeurs du réel k pour lesquelles $\vec{u} \perp \vec{v}$?

II Applications

Exercice 12 (voir [réponses et correction](#))

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère le vecteur \vec{u} de coordonnées $(2; -3)$ et le point A de coordonnées $(1; 2)$

1°) Faire un dessin. Représenter l'ensemble D des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \perp \vec{u}$

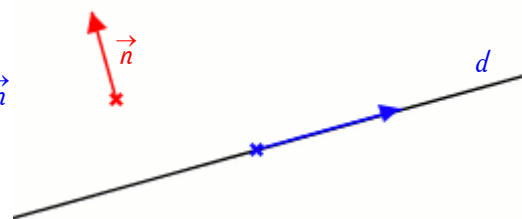
2°) Démontrer que D est une droite dont on donnera une équation. (On dit que \vec{u} est un vecteur normal à D)

Définition

On appelle vecteur normal à une droite d , tout vecteur \vec{n} non nul orthogonal à un vecteur directeur de d .

Remarque

Si \vec{n} est un vecteur normal à d , alors l'ensemble des vecteurs normaux à d est l'ensemble des vecteurs non nuls colinéaires à \vec{n} .



Propriété (voir [démonstration 11](#))

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Une droite d ayant pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}(a; b)$ a une équation de la forme $ax + by + c = 0$.
- Une droite d ayant une équation de la forme $ax + by + c = 0$ a pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}(a; b)$.

Exercice 13 (voir [réponses et correction](#))

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère A(1; 3); B(2; 0) et C(-3; 1).

1°) Déterminer une équation de la hauteur issue de A du triangle ABC.

2°) Déterminer une équation de la hauteur issue de B du triangle ABC. En déduire les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC.

3°) Vérifier le résultat en utilisant le logiciel GeoGebra.

Remarque

- Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, le cercle de centre $\Omega(x_0; y_0)$ et de rayon r a pour équation : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$
- Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.
En exprimant le produit scalaire $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$ en fonction des coordonnées, on retrouve l'équation du cercle.

Exercice 14 (voir [réponses et correction](#))

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A(1; 2) et B(4; -2).

1°) Soit M(x; y). Montrer que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + y^2 = 0$

2°) En écrivant la forme canonique de $x^2 - 5x$, déduire de la question précédente que le cercle C de diamètre $[AB]$ a pour équation : $(x - \frac{5}{2})^2 + y^2 = \frac{25}{4}$

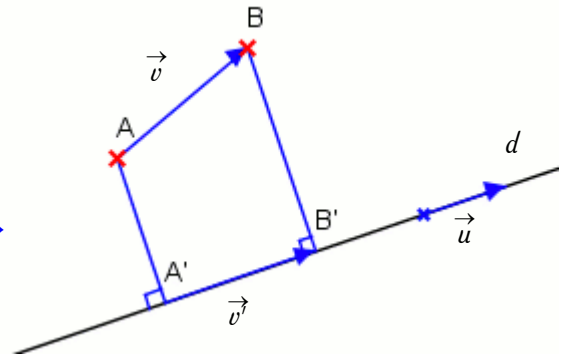
3°) Retrouver ce résultat en déterminant AB et les coordonnées du milieu de $[AB]$.

Propriété (voir [démonstration 12](#))

Soit d une droite et \vec{u} un vecteur directeur **unitaire** de d .
Soient A et B deux points du plan.
Soient A' , B' les projetés orthogonaux de A et B sur d .

On a $\overrightarrow{A'B'} = (\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}) \vec{u}$

En posant $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}' = \overrightarrow{A'B'}$, on obtient $\vec{v}' = (\vec{v} \cdot \vec{u}) \vec{u}$
On dit que \vec{v}' est le projeté orthogonal de \vec{v} sur la droite d .

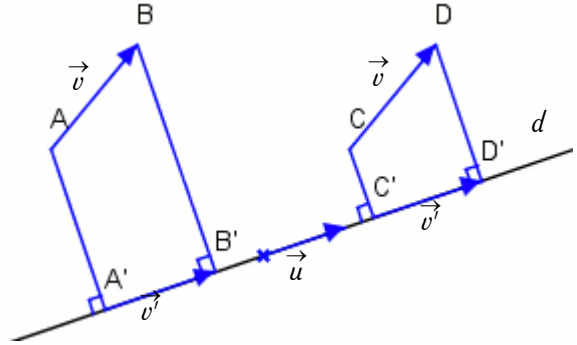


Remarque

Le projeté orthogonal du vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ sur une droite d ne dépend donc pas des points A et B .

c'est-à-dire que si $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

alors $\vec{v}' = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$



Exercice 15 (voir [réponses et correction](#))

On considère dans le plan deux points A et B distincts et I le milieu du segment $[AB]$.

1°) Soit M un point quelconque du plan. En écrivant $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$, démontrer que $MA^2 + MB^2 = 2 MI^2 + \frac{1}{2} AB^2$ (égalité est connue sous le nom de "théorème de la médiane")

2°) On suppose que A et B sont tels que $AB = 4$.

a) Déterminer l'ensemble des points M tels que : $MA^2 + MB^2 = 26$

b) Donner, suivant les valeurs du réel k , l'ensemble des points M tels que : $MA^2 + MB^2 = k$.

Exercice 16 (voir [réponses et correction](#))

1°) On considère un triangle ABC .

En écrivant $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$, démontrer la relation :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 AC \times BC \times \cos \widehat{ACB}$$

Cette relation appelée "formule d'Al-Kashi" peut aussi être écrite sous la forme :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

en notant a, b, c les côtés du triangle et α, β, γ les angles opposés respectifs.

Elle reste valable lorsque l'on échange les côtés c'est-à-dire que l'on peut aussi écrire :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \quad \text{et} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

2°) Que donne la formule d'Al-Kashi dans le cas d'un angle droit ?

La formule d'Al-Kashi est parfois appelée théorème de Pythagore généralisé.

3°) ABC est un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 8$ et $\widehat{BAC} = 22^\circ$

Donner une valeur approchée de BC . En déduire des valeurs approchées des autres angles du triangle. Retrouver ces valeurs en utilisant le logiciel GeoGebra.

Exercice 17 (voir [réponses et correction](#))

Soit ABC un triangle. On note : $BC = a$; $AC = b$; $AB = c$; $\widehat{BAC} = \alpha$; $\widehat{ABC} = \beta$; $\widehat{ACB} = \gamma$

1°) Soit H le pied de la hauteur issue de B dans le triangle ABC . Justifier que $BH = AB \times \sin \alpha$.

En déduire que l'aire du triangle ABC est donnée par : $\mathcal{A} = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$.

Justifier que l'on a aussi $\mathcal{A} = \frac{1}{2} ac \sin \beta = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$

En déduire que $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$ (égalité connue sous le nom de "relation des sinus")

2°) ABC est un triangle tel que $AB = 3$, $\widehat{BAC} = 22^\circ$, $\widehat{ABC} = 43^\circ$

Donner une valeur approchée de AC et de BC .

Exercice 18 (voir [réponses et correction](#))

Application à la trigonométrie : Démonstration des formules d'addition

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$. a et b sont deux nombres réels.

On considère A et B de coordonnées polaires respectives $(1; a)$ et $(1; b)$ dans le repère polaire $(O; \vec{i})$.

1°) Déterminer en fonction de a et b une mesure de l'angle (\vec{OB}, \vec{OA}) .

En déduire en fonction de a et b , le produit scalaire $\vec{OB} \cdot \vec{OA}$.

2°) Donner dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ les coordonnées (cartésiennes) de A et B.

En déduire une autre expression du produit scalaire $\vec{OB} \cdot \vec{OA}$

3°) En comparant les deux expressions du produit scalaire obtenues, démontrer que

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

4°) En utilisant la relation $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$, démontrer la relation

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

5°) En utilisant les relations précédentes avec $\frac{\pi}{2} - a$ et b , démontrer les relations

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \quad \text{et} \quad \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

Exercice 19 (voir [réponses et correction](#))

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère le point A de coordonnées $(3; -2)$ et le vecteur \vec{u} de coordonnées $(-1; 3)$.

Soit Δ l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $\vec{AM} \cdot \vec{u} = 21$.

Donner une équation de Δ , donner la nature de Δ et représenter cet ensemble.

Que peut-on dire de Δ et de la droite d passant par A et de vecteur directeur \vec{u} ? (Justifier)

Déterminer l'intersection de d et de Δ .

Exercice 20 (voir [réponses et correction](#))

On considère dans le plan deux points A et B tels que $AB = 3$.

Soit Δ l'ensemble des points M du plan tels que $\vec{AM} \cdot \vec{AB} = 0$. Caractériser géométriquement et représenter Δ .

Soit Δ' l'ensemble des points M du plan tels que $\vec{AM} \cdot \vec{AB} = -18$.

Déterminer un point H de la droite (AB) appartenant à Δ' .

En exprimant \vec{AM} en fonction de \vec{AH} et \vec{HM} , caractériser géométriquement et représenter Δ' .

Exercice 21 (voir [réponses et correction](#))

On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ les points A(1; 3) et B(4; -1).

1°) Soit Δ l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 17$.

Donner l'équation de Δ . Caractériser géométriquement et représenter Δ .

2°) Soit Δ' l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = 0$.

Donner l'équation de Δ' . Caractériser géométriquement et représenter Δ' .

3°) Soit Δ'' l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = -6$.

Donner l'équation de Δ'' . Caractériser géométriquement et représenter Δ'' .

Exercice 22 (voir [réponses et correction](#))

Distance d'un point à une droite. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la droite d d'équation $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$.

Soit A le point de coordonnées $(x_0; y_0)$ et soit $H(x_1; y_1)$ le projeté orthogonal de A sur d .

1°) Donner les coordonnées d'un vecteur \vec{n} normal à la droite d .

2°) En déduire que
$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \lambda a \\ y_1 = y_0 + \lambda b \end{cases} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

3°) Déterminer la valeur de λ en fonction de a, b, c, x_0 et y_0 .

4°) En déduire la valeur de la distance AH en fonction de a, b, c, x_0 et y_0 .

5°) Justifier que la distance AH est la plus petite distance du point A à un point de d .

On dit que AH est la distance de A à la droite d .

6°) Application : Soit d la droite d'équation $2x + 3y + 5 = 0$ et soit A(4; 1).

Déterminer la distance de A à la droite d . Faire un dessin.