APPLICATION du produit scalaire : calcul de la distance d'un point M à une droite (d) en dimension 2

DEMONSTRATION *de la formule qui permet de calculer la distance d'un point* ***M*** *à une droite* **(d)** *en dimension* ***2***

Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé de ce plan

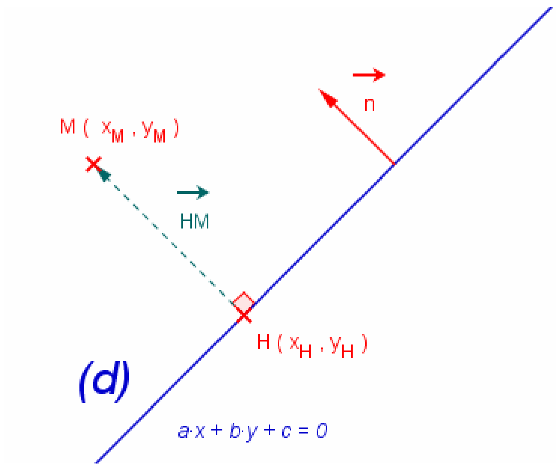
Soit la droite **(d)** appartenant à ce plan et d'équation $ax+by+c=0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$

Le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (a, b) est un *vecteur normal* à la droite **(d)**

Soit un point **M** de ce plan de coordonnées (x_M, y_M) et qui n'est pas un point de la droite **(d)**

Et soit le point **H** de coordonnées (x_H, y_H) : *projection orthogonale* du point **M** sur la droite **(d)**

Par définition : la distance **HM** est la distance du point **M** à la droite **(d)** et on note $HM = d\left(M, (d)\right)$



1) Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{HM} \cdot \vec{n}$ avec la formule :

$$\overrightarrow{HM} \cdot \vec{n} = \left\|\overrightarrow{HM}\right\| \times \left\|\vec{n}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{HM}, \vec{n}\right)$$

Comme $\left|\cos\left(\overrightarrow{HM}, \vec{n}\right)\right| = 1$ car cet angle est un angle nul ou un angle plat

$$\left|\overrightarrow{HM} \cdot \vec{n}\right| = \left|\left\|\overrightarrow{HM}\right\| \times \left\|\vec{n}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{HM}, \vec{n}\right)\right| = \left\|\overrightarrow{HM}\right\| \times \left\|\vec{n}\right\| = HM \times \left\|\vec{n}\right\|$$

On a donc : $HM = \dfrac{\left|\overrightarrow{HM} . \vec{n}\right|}{\left\|\vec{n}\right\|}$

2) Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{HM} \cdot \vec{n}$ avec les coordonnées de ces 2 vecteurs :

- les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{HM}$ sont : $(x_M - x_h, y_M - y_H)$
- les coordonnées du vecteur $\vec{n}$ sont : (a, b)

On a donc $\overrightarrow{HM} \cdot \vec{n} = a(x_M - x_H) + b(y_M - y_H)$ ***car le repère*** $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ ***est orthonormé***

De plus comme le point **H** est un point de la droite **(d)** on a : $ax_H + by_H + c = 0$

Et donc

$$\overrightarrow{HM} \cdot \vec{n} = ax_M - ax_H + by_M - by_H = (ax_M + by_M) - (ax_H + by_H) = (ax_M + by_M) - (-c) = ax_M + by_M + c$$

On obtient avec les calculs **1)** et **2)** : $HM = \dfrac{\left|\overrightarrow{HM} \cdot \vec{n}\right|}{\left\|\vec{n}\right\|} = \dfrac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

En dimension 2 *dans un repère orthonormé :* $d\left(M, (d)\right) = \dfrac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ *(formule à connaître par cœur)*

Remarque : Dans l'espace (*en dimension* ***3***) on peut calculer la formule : **distance d'un point M à un plan P**

On a : $\text{distance}\left(M, (P)\right) = \dfrac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ avec un point **M** de coordonnées (x_M, y_M, z_M)

et un plan **P** d'équation $ax + by + cz + d = 0$ dans un repère orthonormé de l'espace $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

En dimension **3** *dans un repère orthonormé :* $d\left(M, (P)\right) = \dfrac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$