Exercice : Chapitre PRODUIT SCALAIRE CORRECTION

28 On considère ABCD un quadrilatère quelconque non croisé.

a. Montrer que les deux réels :

$AB^2 - BC^2$ et $DC^2 - AD^2$

peuvent chacun s'écrire comme un produit scalaire où intervient le vecteur $\overrightarrow{AC}$.

COUP DE POUCE

Transformer les carrés en carrés scalaires.

b. En déduire que la somme des deux réels précédents est égale à :

$2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$

c. Démontrer alors la propriété suivante :

« Un quadrilatère ABCD possède des diagonales orthogonales lorsque les sommes des carrés des côtés opposés sont égales. »

a) $AB^2 - BC^2 = \left\| \overrightarrow{AB} \right\|^2 - \left\| \overrightarrow{BC} \right\|^2$

$= \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \right)^2 - \overrightarrow{BC}^2$

$= \overrightarrow{AC}^2 + 2\,\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB}^2 - \overrightarrow{BC}^2$

$= \overrightarrow{AC}^2 + 2\,\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$

$= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + 2\,\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} \cdot \left(\overrightarrow{AC} + 2\,\overrightarrow{CB} \right)$

et

$DC^2 - AD^2 = \left\| \overrightarrow{DC} \right\|^2 - \left\| \overrightarrow{AD} \right\|^2 = \overrightarrow{DC}^2 - \overrightarrow{AD}^2 = \left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} \right)^2 - \overrightarrow{AD}^2$

$= \overrightarrow{DA}^2 + 2\,\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AD}^2 = 2\,\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = 2\,\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \left(2\,\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} \right)$

b)

$\left(AB^2 - BC^2 \right) + \left(DC^2 - AD^2 \right) = \overrightarrow{AC} \cdot \left(\overrightarrow{AC} + 2\,\overrightarrow{CB} \right) + \overrightarrow{AC} \cdot \left(2\,\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} \right) = \overrightarrow{AC} \cdot \left(\overrightarrow{AC} + 2\,\overrightarrow{CB} + 2\,\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} \right)$

$= \overrightarrow{AC} \cdot \left(2\,\overrightarrow{CB} + 2\,\overrightarrow{DA} + 2\,\overrightarrow{AC} \right) = 2\,\overrightarrow{AC} \cdot \left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} \right) = 2\,\overrightarrow{AC} \cdot \left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} \right) = 2\,\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$

c)

$\left(AB^2 - BC^2 \right) + \left(DC^2 - AD^2 \right) = 0 \Leftrightarrow 2\,\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$

<u>Conclusion</u> Les diagonales du quadrilatère ABCD sont perpendiculaires si et seulement si

$\left(AB^2 - BC^2 \right) + \left(DC^2 - AD^2 \right) = 0$

c'est-à-dire si et seulement si

$AB^2 + DC^2 = BC^2 + AD^2$