Applications du produit scalaire

A Relations métriques dans le triangle

1- Formule d'Al'Kashi

Soit ABC un triangle. $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\widehat{BAC})$.

Remarques

- si $\widehat{BAC}$ est un angle droit, $\cos(\widehat{BAC})$ = 0 et on retrouve le théorème de Pythagore.
- si $\widehat{BAC}$ est un angle aigu, $\cos(\widehat{BAC})$ > 0 et $BC^2 < AB^2 + AC^2$.
- si $\widehat{BAC}$ est un angle obtus, $\cos(\widehat{BAC})$ < 0 et $BC^2 > AB^2 + AC^2$.

Démonstration

$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2 \cdot \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$.

or $\overrightarrow{BA}^2 = AB^2$, $\overrightarrow{AC}^2 = AC^2$ et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \cdot AC \cdot \cos(\widehat{BAC})$.

On obtient bien $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\widehat{BAC})$.

2- Théorème de la médiane

Soit ABC un triangle et I le milieu de [BC]. $AB^2 + AC^2 = 2\,AI^2 + \frac{BC^2}{2}$.

Démonstration

$AB^2 + AC^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC})^2 = \overrightarrow{AI}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI}^2 + \overrightarrow{IC}^2 + 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IC}$

Or $IB = IC = \frac{BC}{2}$, donc $\overrightarrow{IB}^2 = \overrightarrow{IC}^2 = \frac{BC^2}{4}$.

On obtient alors $AB^2 + AC^2 = 2\,AI^2 + \frac{BC^2}{2} + 2\overrightarrow{AI}(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC})$ et comme $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$,

$AB^2 + AC^2 = 2\,AI^2 + \frac{BC^2}{2}$.

3- Aire et formule des sinus

Soit ABC un triangle.

L'aire de ABC est égale à $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin(\widehat{BAC})$.

Démonstration

Soit H le pied de la hauteur issue de C. On a alors $CH = AC \cdot \sin(\widehat{BAC})$.

L'aire du triangle est donc $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin(\widehat{BAC})$.

On pose a = BC, b = AC, c = AB, $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{ABC}$, $\gamma = \widehat{BCA}$.

On a alors : $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$.

Démonstration
Soit S l'aire du triangle.

D'après la formule précédente, on a $S=\frac{1}{2}\cdot bc\cdot\sin(\alpha)=\frac{1}{2}\cdot ac\cdot\sin(\beta)=\frac{1}{2}ab\cdot\sin(\gamma)$.

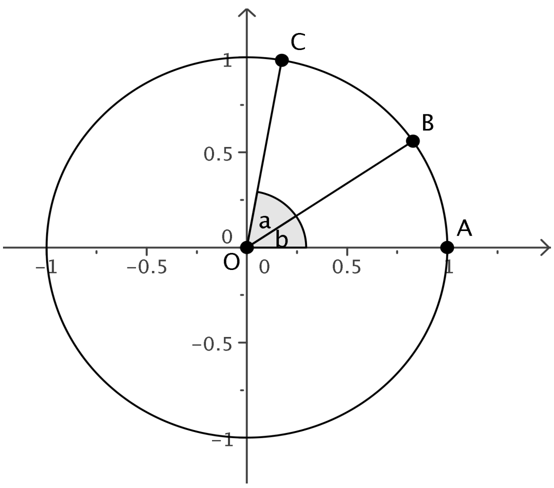
En multipliant tous les membres par $\frac{2}{abc}$, on obtient : $\frac{2S}{abc}=\frac{\sin(\alpha)}{a}=\frac{\sin(\beta)}{b}=\frac{\sin(\gamma)}{c}$.

B Formules trigonométriques

1- Addition et soustraction

> Quels que soient les réels a et b :
> $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
> $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
> $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
> $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$

Démonstration



Sur le cercle trigonométrique on considère les points A, B et C tels que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = b$ et $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}) = a$.
On a alors $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}) = a - b$.
Calculons $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$ de 2 façons.
Comme $\overrightarrow{OB}$ $(\cos(b), \sin(b))$ et $\overrightarrow{OC}$ $(\cos(a), \sin(a))$
on a $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.
Mais $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = OB.OC.\cos(a - b) = \cos(a - b)$
car OB = OC = 1.
On a finalement :
$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
En remplaçant b par $-b$, on obtient :
$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

Enfin, en remplaçant a par $\frac{\pi}{2} - a$ et en remarquant que $\cos(\frac{\pi}{2} - a) = \sin(a)$ et que $\sin(\frac{\pi}{2} - a) = \cos(a)$, on obtient les deux formules concernant le sinus.

2- Duplication

> Quel que soit le réel a :
> $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$
> $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

Démonstration
On applique les formules précédentes en remarquant que $2a = a + a$.

C Ensembles de points

1- Droites

> On considère un point A et un vecteur non nul $\vec{n}$.
>
> L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est une droite passant par A orthogonale à $\vec{n}$. On dit que $\vec{n}$ est un vecteur normal de cette droite.

Application

Le plan est muni du repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On considère les points A(–1; –2), B(0; 4) et C(4; 1).
Déterminer une équation de la droite D, hauteur issue de A du triangle ABC.
La droite D est la perpendiculaire à (BC) passant par A, c'est donc l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.
Pour M(x; y), on a $\overrightarrow{AM}(x+1\,; y+2)$. D'autre part on a $\overrightarrow{BC}(4\,; -3)$.
$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ donne donc 4(x + 1) – 3(y + 2) = 0, soit 4x – 3y – 2 = 0, et enfin $y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$.

Propriété

> Dans le plan muni du repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, si $\vec{n}$ (a, b) est un vecteur normal d'une droite, alors celle-ci admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$.

Dans l'exemple précédent, $\overrightarrow{BC}(4\,; -3)$ est un vecteur normal de la droite D qui admet comme équation 4x – 3y – 2 = 0.

2- Cercles

> On considère deux points A et B.
>
> L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ est le cercle de diamètre [AB].

Application

Le plan est muni du repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On considère les points A(–2; 0) et B(2; 2).
Déterminer une équation du cercle de diamètre [AB].
Le cercle de diamètre [AB] est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.
Pour M(x; y), on a $\overrightarrow{AM}(x+2\,; y)$ et $\overrightarrow{BM}(x-2\,; y-2)$.
$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ donne (x + 2)(x – 2) + y(y – 2) = 0, soit $x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$.
Rappel : pour trouver le centre et le rayon du cercle à partir de l'équation, on essaie de la mettre sous la forme $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, où a et b sont les coordonnées du centre et où R est le rayon.
Ici, $x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$ donne $x^2 + (y-1)^2 = 5$.
Le centre du cercle a (0; 1) comme coordonnées, le rayon du cercle est $\sqrt{5}$.