Chapitre 3

La notion de vecteurs

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Vecteurs Définition de la translation qui transforme un point A du plan en un point B. Vecteur $\overrightarrow{AB}$ associé. ✓		À tout point C du plan, on associe, par la translation qui transforme A en B, l'unique point D tel que [AD] et [BC] ont même milieu.
Égalité de deux vecteurs : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ ✓	Savoir que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ équivaut à ABDC est un parallélogramme, éventuellement aplati. ✓	
Coordonnées d'un vecteur dans un repère.	Connaître les coordonnées $(x_B-x_A\,;y_B-y_A)$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$	
Somme de deux vecteurs ✓	Calculer les coordonnées de la somme de deux vecteurs dans un repère.	La somme des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation résultant de l'enchaînement des translations de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$. ✓
Produit d'un vecteur par un nombre réel. ✓	Utiliser la notation $\lambda\vec{u}$. Établir la colinéarité de deux vecteurs. ✓	Pour le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (a, b) dans un repère, le vecteur $\lambda\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $(\lambda a\,;\lambda b)$ dans le même repère. Le vecteur $\lambda\vec{u}$ ainsi défini est indépendant du repère.
Relation de Chasles. ✓	Construire géométriquement la somme de deux vecteurs. Caractériser alignement et parallélisme par la colinéarité de vecteurs. ✓	

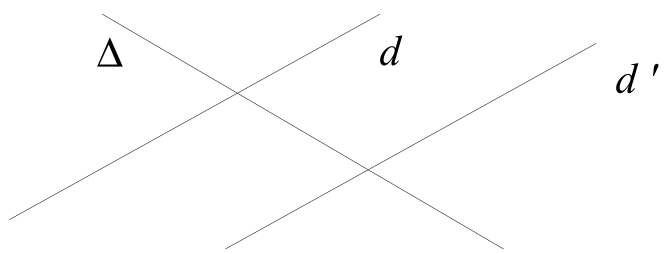
I. Vecteur et translation

1.1) Direction et sens

Définition 1.

Une droite définit une direction. On dit que deux droites d et d' ont la ***même direction*** lorsque d et d' sont parallèles ou confondues. Par conséquent, si deux droites sont sécantes, alors elles n'ont pas la même direction.

Exemple

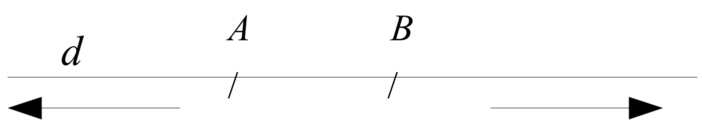


Les droites d et d' sont parallèles donc elles la même direction. Δ et d sont sécantes, donc elles n'ont pas la même direction.

Définition 2.

Soit d une droite donnée. On peut définir ***deux sens*** possibles sur cette droite.

Sens 1 : de A vers B. Le sens 2 : de B vers A.



Attention : Le mot « *direction* » dans le langage courant se confond avec le mot « *sens* ». En mathématiques, on choisit d'abord une direction (une droite) puis on choisit un des deux sens sur cette droite.

1.2) **Activité :** Translation – déplacement rectiligne

Figure F

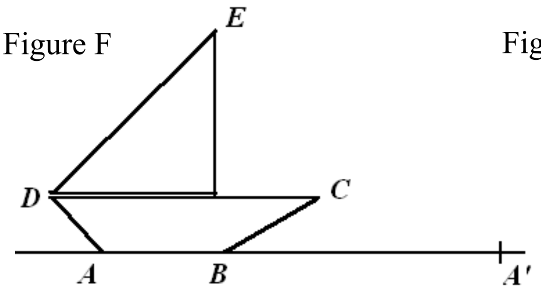


Figure F ' (à compléter)

Le voilier se déplace sur une mer calme du point A au point A' ; dessiner le voilier dans sa position en A'. et tracer les chemins de chacun des points indiqués en utilisant différentes couleurs. Que constate-t-on ?

Définition 3.

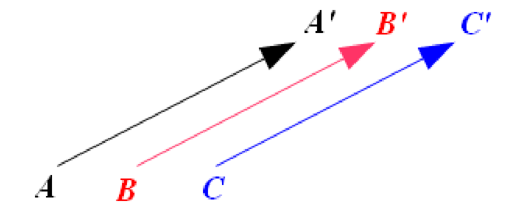
Lorsqu'on fait glisser une figure F d'un point A à un point A' sur une ligne droite sans la tourner, on déplace tous ses points sur des droites parallèles : dans la même direction, dans le même sens et de la même longueur. On dit que la figure F ' est ***l'image*** de la figure F par la ***translation*** qui transforme le point ***A en A'***.

De même, le point B' est ***l'image*** de B par la ***translation*** qui transforme ***A en A'***.

Définition 4.

Les couples formés des points et de leurs images par cette translation : (A ; A') , (B ; B'), (C ; C'),… définissent un vecteur par la donnée :

- d'***une direction*** : la droite (AA') ;
- d'***un sens*** : de A vers A' ;
- et d'***une longueur*** = AA'.



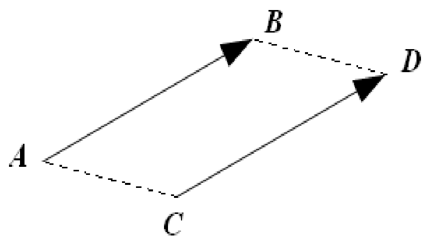
On note $\vec{u}$ ce ***vecteur associé à la translation*** et on écrit :

$$\boxed{\vec{u} = \overrightarrow{AA'}}$$

La longueur d'un vecteur s'appelle aussi ***la norme*** de ce vecteur. On note $\|\vec{u}\| = AA'$.

1.3) Vecteurs égaux

Définition 5.

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux lorsqu'ils ont la même direction, le même sens et la même longueur. On écrit : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$	

Théorème 1.

Soient A, B, C et D quatre points deux à deux distincts. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1°) Le point D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$;

2°) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux ;

3°) le quadrilatère *ABDC* est un parallélogramme (éventuellement aplati).

Attention : *ABDC* et non *ABCD* : il faut faire le *tour du quadrilatère,* dans un sens ou dans l'autre.

Conséquence : Si on a une égalité vectorielle, on peut écrire trois autres égalités vectorielles (les deux autres s'obtiennent en changeant de sens) :

Théorème 2.

[$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$] ssi [ABDC est un parallélogramme] ssi [$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$]

On peut en déduire toutes les propriétés du parallélogramme, sur les diagonales, le centre de symétrie, l'égalité des longueurs des côtés opposés, vues en classe de 5ème.

1.4) Vecteur nul

Définition 5.

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est ***nul*** si et seulement si A = B. On a alors : $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

Donc : [$\overrightarrow{AB}=\vec{0}$] si et seulement si [A = B].

Remarque : Le vecteur nul est le seul vecteur qui n'a pas de direction ni de sens !

1.5) Vecteurs opposés

Définition 6.

Deux vecteurs sont dits ***opposés*** lorsqu'ils ont la même direction, la même norme et des sens opposés.

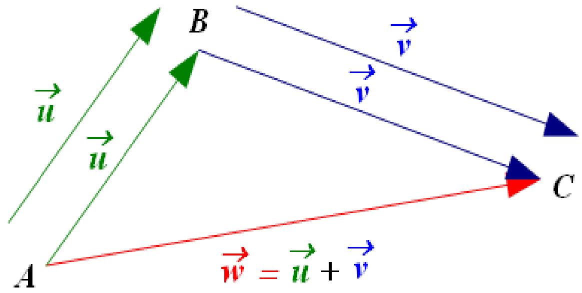
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont des vecteurs opposés. On écrit alors :

$$\boxed{\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}}$$

2. Opérations sur les vecteurs

2.1) Enchaînement de deux translations

Soit t_1 la translation de vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et t_2 la translation de vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$



Se déplacer de A en B, puis de B en C, revient à se déplacer de A en C. Donc, appliquer la translation t_1 puis la translation t_2 revient à se déplacer de A en C. On obtient une nouvelle translation. Le vecteur associé à cette translation est $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$.

Définition 7.

> Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques. Le vecteur associé à la translation résultant de l'enchaînement des translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'appelle la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On écrit : $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

2.2) Addition de vecteurs

Comme conséquence de cette définition, on a la propriété très importante suivante :

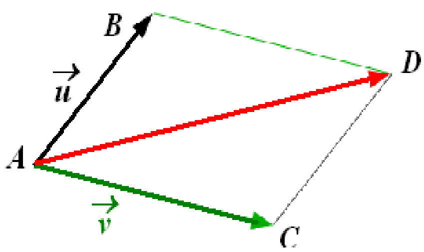
Relation de Chasles : (*enchaînement de vecteurs – mis bout à bout*).

> Quels que soient les points A, B et C du plan, on a :
> $$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

En utilisant la propriété n°1, nous pouvons écrire autrement cette propriété pour trouver le quatrième sommet d'un parallélogramme.

Règle du parallélogramme : (*Recherche du 4ème point, 2 vecteurs de même origine*).

> Quels que soient les points A, B et C du plan. Il existe un point D tel que :
> [ABDC est un parallélogramme] si et seulement si [$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$].



ABDC est un parallélogramme, alors $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Donc : $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$.

Remarque : D'après la règle du parallélogramme, dans une addition, on peut changer l'ordre des vecteurs, la somme ne change pas.

Théorème 3.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

2.3) Soustraction de vecteurs

Définition 8.

Pour soustraire un vecteur on ajoute son opposé. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques, alors :

$$\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$$

$\vec{u}-\vec{v}$ s'appelle ***la différence*** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exemple : Soient A, B et C trois points du plan. Calculer $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+(-\overrightarrow{AC})$ $\rightarrow$ par définition de la soustraction ;

$.=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$ $\rightarrow$ par définition d'un vecteur opposé ;

$.=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}$ $\rightarrow$ on peut changer l'ordre des vecteurs

$.=\overrightarrow{CB}$ $\rightarrow$ d'après la relation de Chasles ;

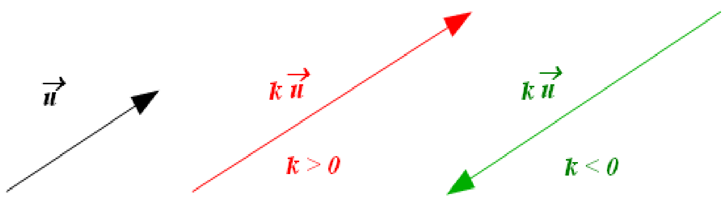
2.4) Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

Définition 9.

Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque (non nul) et k un nombre réel non nul.

On appelle ***produit du vecteur $\vec{u}$ par le nombre réel k***, le vecteur noté $k\vec{u}$ ayant :

- la même direction que $\vec{u}$;
- le même sens si $k > 0$; et de sens contraire si $k < 0$;
- une norme égale à k fois la norme de $\vec{u}$ si $k > 0$; et à $(-k)$ fois la norme de $\vec{u}$ si $k > 0$.



Remarque :

Si $k = 0$ ou si $\vec{u}=\vec{0}$, alors : $0.\vec{u}=\vec{0}$ et $k.\vec{0}=\vec{0}$.

2.5) Vecteurs colinéaires

Définition 10.

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ***colinéaires*** lorsqu'ils ont la même direction.

Théorème 4.

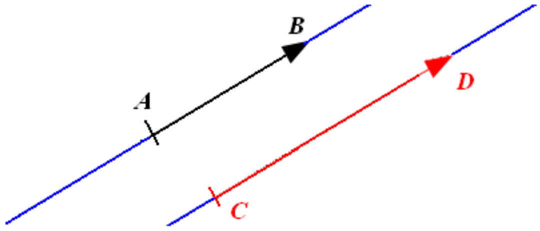
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ***colinéaires*** si et seulement si, il existe un nombre réel k, tel que : $\vec{v}=k\vec{u}$ si et seulement si, il existe un nombre réel k', tel que : $\vec{u}=k'\vec{v}$

3. Conséquences :

3.1) parallélisme et alignement

Théorème 5.

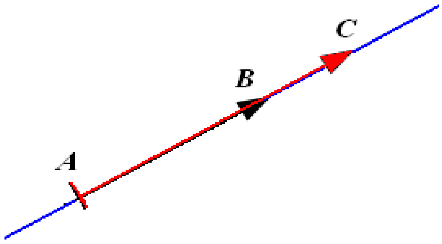
Soit A, B, C et D quatre points du plan. Les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, si et seulement si, les droites (AB) et (CD) sont parallèles.



Rappel. Propriété : Si deux droites sont parallèles et ont un point commun, alors elles sont confondues (vue en 5ème). D'où la propriété importante suivante qui permet de démontrer que trois points sont alignés.

Théorème 6.

Soient $A, B,$ et C trois points du plan. Les trois points A, B et C sont alignés, si et seulement si, deux des trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.



3.2) Milieu d'un segment

Théorème 7.

Soit A, B et I trois points du plan. Le point I est le milieu du segment [AB] si et seulement si, l'une des conditions suivantes est réalisée :

1°) $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$ 2°) $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ 2°bis) $\overrightarrow{IB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ 3°) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

Exercice type : ABC est un triangle. I est le milieu de [AB]. Les points J et K sont définis par les égalités vectorielles : $\overrightarrow{JC}=2\overrightarrow{JA}$ et $\overrightarrow{KB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{KC}$.

1°) Exprimer $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

2°) Démontrer que les points I, J et K sont alignés.

4. Calcul vectoriel

Théorème 8.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$; et tous nombres réels a et b, on a les propriétés suivantes :

P1) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ On peut changer l'ordre des vecteurs ;

P2) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ On peut faire des groupements ;

P3) $\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$

P4) $\vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}$

P5) $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$

P6) $(k+k')\vec{u}=k\vec{u}+k'\vec{u}$

P7) $(k\times k')\vec{u}=k(k'\vec{u})$

P8) $1\vec{u}=\vec{u}$

Exemple. Calculer et écrire l'expression la plus réduite possible du vecteur $\vec{V}$:

$$\vec{V}=2\vec{u}-3\vec{v}+3(\vec{u}+\vec{v}-\vec{w})-4\vec{u}+5\vec{w}$$

On a

$$\begin{aligned}\vec{V} &= 2\vec{u}-3\vec{v}+3(\vec{u}+\vec{v}-\vec{w})-4\vec{u}+5\vec{w}\\ &= 2\vec{u}-3\vec{v}+3\vec{u}+3\vec{v}-3\vec{w}-4\vec{u}+5\vec{w}\\ &= 2\vec{u}+3\vec{u}-4\vec{u}-3\vec{v}+3\vec{v}-3\vec{w}+5\vec{w}\\ &= (2+3-4)\vec{u}+(-3+3)\vec{v}+(-3+5)\vec{w} \quad \text{on peut sauter cette étape.}\\ &= 1\vec{u}+\vec{0}+2\vec{w}\end{aligned}$$

Conclusion $\vec{V}=\vec{u}+2\vec{w}$.