Chapitre 5

Équations - Inéquations

Ce que dit le programme :

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Expressions algébriques Transformations d'expressions algébriques en vue d'une résolution de problème.	Associer à un problème une expression algébrique. Identifier la forme la plus adéquate (développée, factorisée) d'une expression en vue de la résolution du problème donné. Développer, factoriser des expressions polynomiales simples ; transformer des expressions rationnelles simples.	Les activités de calcul nécessitent une certaine maîtrise technique et doivent être l'occasion de raisonner. Les élèves apprennent à développer des stratégies s'appuyant sur l'observation de courbes, l'anticipation et l'intelligence du calcul. Le cas échéant, cela s'accompagne d'une mobilisation éclairée et pertinente des logiciels de calcul formel.
Équations Résolution graphique et algébrique d'équations.	Mettre un problème en équation. Résoudre une équation se ramenant au premier degré. Encadrer une racine d'une équation grâce à un algorithme de dichotomie.	Pour un même problème, combiner résolution graphique et contrôle algébrique. Utiliser, en particulier, les représentations graphiques données sur écran par une calculatrice, un logiciel.
Inéquations Résolution graphique et algébrique d'inéquations.	Modéliser un problème par une inéquation. Résoudre graphiquement des inéquations de la forme : $f(x) < k$; $f(x) < g(x)$. Résoudre une inéquation à partir de l'étude du signe d'une expression produit ou quotient de facteurs du premier degré. Résoudre algébriquement les inéquations nécessaires à la résolution d'un problème.	Pour un même problème, il s'agit de : combiner les apports de l'utilisation d'un graphique et d'une résolution algébrique, mettre en relief les limites de l'information donnée par une représentation graphique. Les fonctions utilisables sont les fonctions polynômes de degré 2 ou homographiques.

I. Résolution d'équations

1.1) Équations du 1er degré

Définition 1.

Une équation du premier degré à une inconnue est une égalité entre deux expressions algébriques contenant une seule variable de degré au plus égal à 1. Ce type d'équations peut se ramener à la forme réduite : $ax+b=0$ ou $ax=b'$.

Résoudre une équation, c'est trouver *toutes* les valeurs pour lesquelles l'égalité est vraie. Ces valeurs sont les solutions de l'équation. S désigne l'ensembe des solutions.

Exemple 1. *x désigne l'inconnue. Tous les signes (=) sont alignés verticalement !*

1°) Résoudre l'équation : $5(x-1)=x+2(x+1)-8$

$5x-5 = x+2x+2-8$	On développe pour supprimer les parenthèses
$5x-5 = 3x-6$	On réduit chacun des deux membres
$5x-3x = -6+5$	On regroupe les termes de même nature
$2x = -1$	On réduit chacun des deux membres
$\dfrac{2x}{2} = \dfrac{-1}{2}$	On simplifie
$x = \dfrac{-1}{2}$	

Conclusion : Cette équation admet une seule solution. On écrit : $S=\left\{\frac{-1}{2}\right\}$

Remarque : ***Il est interdit de diviser par 0.***

Exemple 2.
1°) Si on rencontre une équation du type : $0x=0$, alors ***tous*** les nombres réels sont solutions de cette équation. Donc : $S=\mathbb{R}$.

2°) Si on rencontre une équation du type : $0x=7$, ***aucun*** nombre réel n'est solution de cette équation. Donc : $S=\varnothing$, appelé l'ensemble vide !

1.2) Équations-produits

Définition 2.

Une équation du type $P(x)\times Q(x)=0$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des expressions algébriques s'appelle une ***équation-produit***.

Exemple : Une équation du type $(ax+b)(cx+d)=0$ est une équation-produit.

Théorème du produit nul

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses (ces) facteurs est nul !

Autrement dit : Pour tous nombres réels *a* et *b*: [$a\times b=0 \Leftrightarrow a=0$ ou $b=0$]

ou encore : [$(ax+b)(cx+d)=0$] équivaut à [$ax+b=0$ ou $cx+d=0$].

Exemple 3.
Résoudre l'équation : $(2x+3)(x-4)=0$
C'est une équation-produit. Donc, d'après le théorème du produit nul, on a :

$(2x+3)(x-4)=0$ équivaut à $2x+3=0$ ou $x-4=0$

donc $2x=-3$ ou $x=4$

ce qui donne $\frac{2x}{2}=\frac{-3}{2}$ ou $x=4$

d'où $x=-\frac{3}{2}$ ou $x=4$

Conclusion : Cette équation admet (exactement) deux solutions. Donc $S=\left\{\frac{-3}{2},4\right\}$

1.3) Cas particulier : équations de la forme $x^2 = a$

Théorème 2.

Soit a un nombre réel. On distingue trois cas :

1er cas : $a < 0$: L'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solution. Donc $S = \varnothing$,
Car le carré d'un nombre réel est positif ou nul

2ème cas : $a = 0$: L'équation $x^2 = 0$ admet une solution unique $x = 0$. Donc $S=\{0\}$

3ème cas : $a > 0$: L'équation $x^2 = a$ admet deux solutions $x=-\sqrt{a}$ et $x=\sqrt{a}$.
Donc $S=\{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$.

Démonstration : Les deux premiers cas sont évidents.
Pour le 3ème cas, l'équation $x^2 = a$ équivaut à $x^2-(\sqrt{a})^2=0$.
On obtient une identité remarquable (I.R.n°3) que nous pouvons factoriser.
Ce qui donne : $(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})=0$
On obtient une équation-produit. Donc, d'après le théorème du produit nul, on a :

$$x-\sqrt{a}=0 \quad \text{ou} \quad x+\sqrt{a}=0$$

Ce qui donne :

$$x=\sqrt{a} \quad \text{ou} \quad x=-\sqrt{a}$$

Conclusion : Cette équation admet deux solutions. Donc $S=\{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$ CQFD

1.4) Équations-quotients

Définition 3.

Une équation du type $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=0$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des expressions algébriques (avec $Q(x)\neq 0$) s'appelle une ***équation-quotient***.

Théorème 3.

Pour tout nombre réel x tel que $Q(x)\neq 0$, on a :
l'équation $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=0$ équivaut à [$P(x)=0$ et $Q(x)\neq 0$].

Exemple 4.

L'équation (E) : $\dfrac{2x^2-8}{x-2}=0$ est une équation-quotient.
Avant de résoudre cette équation, il faut chercher les valeurs qui annulent $Q(x)$.
Ce sont les valeurs telles que $Q(x)=0$ qu'on appelle ***les valeurs interdites***.

$$Q(x)=0 \iff x-2=0$$
$$\iff x=2$$

On obtient ainsi le domaine de définition de l'équation (E) : $D_E=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Par conséquent, pour tout $x \neq 2$ on a :

L'équation $\dfrac{2x^2-8}{x-2}=0$ équivaut à $2x^2-8=0$ (Je factorise par 2)

Donc $2(x^2-4)=0$ (J'obtiens une I.R.n°3 que je factorise aussi)

Donc $2(x-2)(x+2)=0$ donc d'après le théorème du produit nul on a :

$2=0$ ou $x-2=0$ ou $x+2=0$

Or $2 \neq 0$ donc $x=2$ ou $x=-2$.

Mais, $x=2$ est une valeur interdite, donc cette équation n'admet qu'une seule solution $x=-2$.

Conclusion : $S=\{-2\}$.

1.5) Mise en équation d'un problème

Exemple 5.

Lors d'un match de football dans un village, il y avait 1000 spectateurs. Les spectateurs assis dans les tribunes paient 10 € le billet d'entrée. Les spectateurs debout derrière les grilles paient 5 € le billet d'entrée. La recette totale du match est de 8270 €.

Calculer le nombre de spectateurs de chaque catégorie.

1ère étape : Choisir et nommer l'inconnue.

On appelle x le nombre de spectateurs assis. (On peut choisir les spectateurs debout)

2ème étape : Calculer l'autre inconnue en fonction de x s'il y a lieu.

On sait qu'il y a 1000 spectateurs au total et x spectateurs assis.

Donc, il y a $(1000 - x)$ spectateurs debout.

3ème étape : Traduire les données du problème par une équation ou une inéquation :

On sait que :

Recette spectateurs assis + Recette spectateurs debout = Recette totale

Donc : $10 \times x + 5 \times (1000 - x) = 8270$

4ème étape : Résoudre l'équation ou l'inéquation algébriquement :

$$10x+5(1000-x)=8270$$
$$10x+5000-5x=8270$$
$$10x-5x=8270-5000$$
$$5x=3270$$
$$\frac{5x}{5}=\frac{3270}{5}$$

Donc $x=654$

Par conséquent, cette équation admet une seule solution : $x=654$.

5ème étape : Traduire le résultat en langage courant et conclure en répondant à la question posée.

$x=654$ Donc $1000-x=1000-654=346$

Conclusion : Il y avait 654 spectateurs assis et 346 spectateurs debout.

Exemple 5.
Deux champs rectangulaires ABCD et ABEF ont un côté commun [AB].
On pose AB = x. Les deux autres côtés sont aussi exprimés en fonction de x :
BC = 4x–3 et BE = 2x+3.
Objectif : déterminer x pour que ces deux champs aient la même aire.

1ère méthode : On définit deux fonctions $f(x)$ = aire(ABCD) et $g(x)$ = aire(ABEF)
a) Déterminer les expressions de $f(x)$ et $g(x)$ et construire leurs graphiques dans un même repère (utiliser un tableau de valeurs, la calculatrice ou un logiciel dynamique).
b) Écrire une équation qui traduit le problème.
c) Lire graphiquement les solutions possibles. Conclure.

2ème méthode : Résolution algébrique
a) Résoudre l'équation : $f(x) = g(x)$.
b) Conclure.

II. Résolution d'inéquations

2.1) Étude du signe d'une expression du 1er degré

a) *Résolution algébrique*

On peut utiliser les propriétés des inégalités (connues depuis les classes de 4ème et la 3ème) pour étudier le signe d'une expression algébrique du 1er degré. [*Cf.* ***Rappels sur les égalités et les inégalités*** – dans la même rubrique.]

Exemple 1.
Étudier le signe de l'expression : $A(x)=3x-5$
Pour cela, on résout l'inéquation du 1er degré : $A(x)\geqslant 0$
On a : $A(x)\geqslant 0$ donc $3x-5\geqslant 0$ donc $3x\geqslant 5$ donc $\frac{3x}{3}\geqslant\frac{5}{3}$
(On divise par un nombre positif, on ne change pas le sens de l'inégalité).
Donc $x\geqslant\frac{5}{3}$ On obtient une *valeur remarquable* $x=\frac{5}{3}$ à partir de laquelle l'expression $A(x)$ change de signe.
Conclusion : $A(x)>0$ équivaut à : $x>\frac{5}{3}$, $A(x)=0$ équivaut à : $x=\frac{5}{3}$
et : $A(x)<0$ équivaut à : $x<\frac{5}{3}$

On peut résumer ces résultats dans un seul ***tableau de signes*** :

x	$-\infty$		$5/3$		$+\infty$
$A(x)$		$-$	0	$+$	

<u>Exemple 2</u>.
Étudier le signe de l'expression : $B(x)=-2x+4$
Pour cela, on résout l'inéquation du 1er degré : $B(x)\geqslant 0$
On a : $B(x)\geqslant 0$ donc $-2x+4\geqslant 0$ donc $-2x\geqslant -4$ donc $\frac{-2x}{-2}\leqslant\frac{-4}{-2}$
(On divise par un nombre négatif, on change le sens de l'inégalité).
Donc $x\leqslant 2$
On obtient une *valeur remarquable* $x = 2$ partir de laquelle l'expression $B(x)$ change de signe.
Conclusion : $B(x)>0$ équivaut à : $x<2$
$B(x)=0$ équivaut à : $x=2$
et : $B(x)<0$ équivaut à : $x>2$
On peut résumer ces résultats dans un seul ***tableau de signes*** :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$B(x)$		$+$	0	$-$	

b) <u>*Résolution graphique*</u>

Une expression de la forme $ax+b$ du premier degré correspond à une fonction affine $f: x\rightarrow f(x) = ax+b$, de coefficient « a » et de *terme constant « b »*, dont la représentation graphique est une droite d de *coefficient directeur « a »* et d'*ordonnée à l'origine « b »*. Or on sait, depuis la classe de 3ème, que :

La fonction *f est strictement croissante* si et seulement si : ***a* > 0**. La fonction *f est strictement décroissante* si et seulement si : ***a* < 0** La fonction *f est constante* si et seulement si : ***a* = 0.**

De plus [$f(x) = 0$] équivaut à [$ax+b = 0$] donc à [$ax = -b$] donc à [$x=\frac{-b}{a}$]

On obtient une *valeur remarquable* $x=\frac{-b}{a}$ pour le changement de signe.

***a* > 0**

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

***a* < 0**

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

Exemple 3.
Étudier le signe de l'expression : $A(x)=3x-5$
Pour cela, il suffit de constater que *A* correspond à une fonction affine de coefficient *a* = 3, donc a > 0, donc la fonction *A* est strictement croissante, donc elle est négative, nulle, puis positive. De plus

$A(x)=0$ (ssi) $3x-5=0$ (ssi) $3x=5$ (ssi) $x=\dfrac{5}{3}$. On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		$5/3$		$+\infty$
$A(x)$		$-$	0	$+$	

Exemple 4.
Étudier le signe de l'expression : $B(x)=-2x+4$
Pour cela, il suffit de constater que *B* correspond à une fonction affine de coefficient *a* = – 2, donc a < 0, donc la fonction *B* est strictement croissante, donc elle est négative, nulle, puis positive. De plus

$B(x)=0$ donc $-2x+4=0$ donc $-2x=-4$ donc $x=2$

(On divise par un nombre négatif, on change le sens de l'inégalité).
On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$B(x)$		$+$	0	$-$	

2.2) Inéquations-produits

a) *Résolution algébrique*

Résoudre une inéquation, revient à déterminer le signe d'une expression algébrique.

Méthode 1.

Pour étudier le signe d'une expression algébrique, il suffit de factoriser l'expression, étudier le signe de chaque facteur, puis appliquer la règle des signes d'un produit dans un tableau de signes.

Exemple 1. Résoudre l'inéquation $(2x-3)(x+1)\leqslant(2x-3)(3x-3)$ (1)

1ère étape : je passe tout à gauche : $(2x-3)(x+1)-(2x-3)(3x-3)\leqslant 0$

2ème étape : je factorise : $(2x-3)(x+1)-(2x-3)(3x-3)\leqslant 0$

donc : $(2x-3)[(x+1)-(3x-3)]\leqslant 0$

Je supprime les parenthèses et je gère correctement le signe « – » :

$(2x-3)[x+1-3x+3]\leqslant 0$

J'obtiens une expression factorisée : $(2x-3)(-2x+4)\leqslant 0$ (*)

3ème étape : j'étudie le signe de chaque facteur : (j'utilise la 2ème méthode) :

- L'expression $2x-3$ correspond à une fonction affine de coefficient positif 2, elle est strictement croissante, passe du – au + et s'annule en $x=\dfrac{3}{2}$;

- L'expression $-2x+4$ correspond à une fonction affine de coefficient négatif -2, elle est strictement décroissante, passe du + au – et s'annule en $x = 2$.

4ème étape : Je fais un tableau de signes pour connaître le signe du produit
On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$	Variations de x
$2x-3$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$		Signe de $(2x-3)$
$-2x+4$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$		Signe de $(-2x+4)$
$(2x-3)(-2x+4)$		$-$	0	$+$	0	$-$		Signe du produit

En résumé : Signe du produit :

1. Le produit s'annule pour $x=\frac{3}{2}$ ou $x = 2$. (on le savait déjà!)
2. Le produit est positif si, et seulement si, $\frac{3}{2}<x<2$.
3. Le produit est négatif si, et seulement si, $x<\frac{3}{2}$ ou $x > 2$.

5ème étape : je réponds à la question. D'après (*), je cherche sur quel intervalle, cette expression est négative ou nulle ;

$$x<\frac{3}{2} \text{ ou } x > 2.$$

6ème étape : Conclure.

L'ensemble des solutions de l'inéquation (1) est $S =]-\infty\ ;\ \frac{3}{2}\ ] \cup [2\ ;+\infty[$.

b) *Résolution graphique*

Chaque expression peut correspondre à une fonction. Chaque fonction peut être représentée par une courbe représentative.
Résoudre une inéquation du type $f(x) < g(x)$, revient à déterminer la position relative des courbes de f et de g.

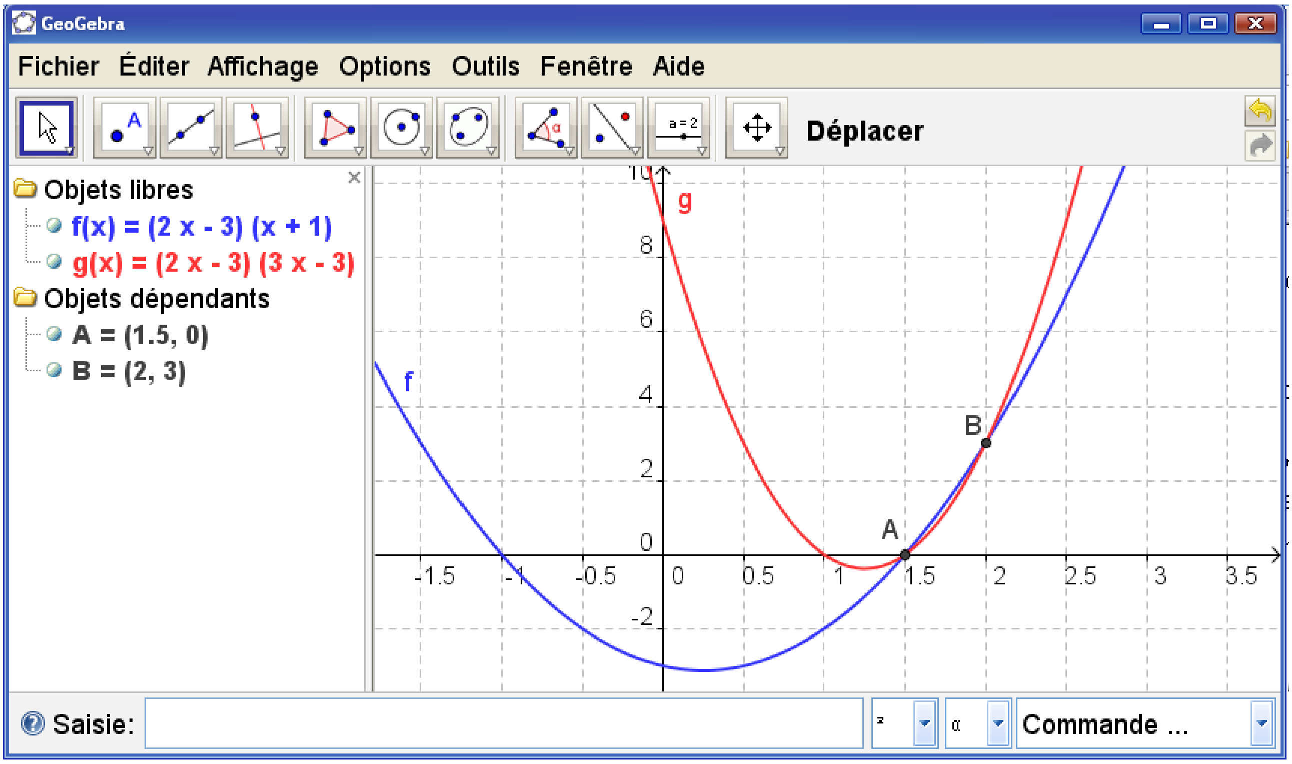
Méthode 2.

Pour résoudre une inéquation du type $f(x) < g(x)$, il suffit charcher les abscisses des points d'intersection des deux courbes [résoudre $f(x) = g(x)$] et déterminer toutes les valeurs de x, pour lesquelles la courbe de f est située en dessous de la courbe de g.

Exemple 2. Résoudre l'inéquation $(2x-3)(x+1)\leqslant(2x-3)(3x-3)$ (1)
Posons $f(x)=(2x-3)(x+1)$ et $g(x)=(2x-3)(3x-3)$.
L'inéquation (1) équivaut à $f(x)\leqslant g(x)$ (2)

A l'aide d'un logiciel dynamique :

1ère étape : on construit les deux courbes de f et de g.



2ème étape : on détermine les abscisses des points d'intersection des deux courbes Ce qui revient à résoudre l'équation : [$f(x) = g(x)$].

Ici les deux courbes se coupent aux points d'abscisses $x = 1{,}5 = \dfrac{3}{2}$ et $x = 2$.

3ème étape : on détermine toutes les valeurs de x, pour lesquelles la courbe de f est située en dessous de la courbe de g.

Ici, la courbe de f est située en dessous de la courbe de g pour tout $x < \dfrac{3}{2}$ ou $x > 2$.

4ème étape : Conclure.

L'ensemble des solutions de l'inéquation (2) est $S =]-\infty\,;\, \dfrac{3}{2}\,] \cup [2\,;+\infty[$.

2.3) Inéquations-quotients

Dans cette partie, nous utilisons exactement les mêmes méthodes que ci-dessus, en rajoutant une condition d'existence : ***la recherche des valeurs interdites***, pour les exclure du domaine de définition de l'inéquation et de l'ensemble des solutions :

Méthode 3.

Pour étudier le signe d'une expression-quotient, il faut d'abord chercher les valeurs interdites, factoriser le numérateur et le dénominateur, étudier le signe de chaque facteur puis appliquer la règle des signes du quotient dans un tableau de signes.

Exemple 3. Résoudre l'inéquation $\frac{(2x-3)(-2x+4)}{(x^2-4)} \leqslant 0$ (3)

Recherche des valeurs interdites :

$x^2-4=0$ équivaut à $(x-2)(x+2)=0$

donc à $x-2=0$ ou $x+2=0$

donc à $x=2$ ou $x=-2$

Les deux valeurs interdites sont 2 et – 2. Donc le domaine de définition de l'inéquation (3) est : $D_3=\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$.

a) *Résolution algébrique*

Étude du signe de chaque facteur :

$2x-3>0$ $2x>3$ $x>\frac{3}{2}$	$-2x+4>0$ $-2x>4$ on divise par $-2<0$ donc $x<-2$	$x-2>0$ $x>2$	$x+2>0$ $x>-2$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$	Variations de x
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		Signe de $(2x-3)$
$-2x+4$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		Signe de $(-2x+4)$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		Signe de $(x+2)$
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		Signe de $(x-2)$
$\frac{(2x-3)(-2x+4)}{(x^2-4)}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$		Signe du quotient *les v.i. sont exclues*

En résumé : Signe du quotient :

4. Le quotient s'annule pour $x=\frac{3}{2}$ (car 2 est une valeur interdite)
5. Le quotient est positif si, et seulement si, $-2<x<\frac{3}{2}$.
6. Le quotient est négatif si, et seulement si, $x<-2$ ou $x>\frac{3}{2}$ et $x\neq 2$.

Conclusion :

L'ensemble des solutions de l'inéquation (3) est : (l'expression est négative ou nulle) :

$$S =]-\infty ; -2[\cup [\frac{3}{2} ; 2 [\cup] 2 ; +\infty[$$

b) *Résolution graphique :* On peut aussi utiliser la méthode graphique. *Cf.* ci-dessus.