Second degré – Forme canonique d'un trinôme

Exercices corrigés

Objectifs abordés dans cette fiche : *(cliquez sur l'exercice pour un accès direct)*

Rappel : Trinôme du second degré

On appelle fonction polynôme du second degré (ou trinôme du second degré) toute fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, pouvant s'écrire sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c désignent des réels, avec $a \neq 0$.

Exercice 1 *(1 question)* — *Niveau : facile*

Parmi les écritures de trinômes du second degré suivantes, reconnaître les formes canoniques.

1) $2x^2+3x-1$
2) $3(x-1)^2+4$
3) $(x+7)(2x-5)$
4) $-(x+3)^2-7$
5) $-4(x-9)^2$
6) $2x^2-5$

Correction de l'exercice 1 — ↻ Retour au menu

Rappel : Forme canonique d'un trinôme du second degré

Tout trinôme du second degré de la forme $f(x)=ax^2+bx+c$ (où a, b et c désignent des réels, avec $a\neq 0$) peut s'écrire sous sa forme canonique unique $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$.

1) Le trinôme $2x^2+3x-1$ n'est pas de la forme $a(x-\alpha)^2+\beta$ donc l'écriture proposée n'est pas celle d'une forme canonique de trinôme du second degré. Il s'agit en fait ici d'une forme développée réduite.

2) Le trinôme $3(x-1)^2+4$ est de la forme $a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $a=3$, $\alpha=1$ et $\beta=4$ donc l'écriture proposée est bien celle d'une forme canonique de trinôme du second degré.

3) Le trinôme $(x+7)(2x-5)$ n'est pas de la forme $a(x-\alpha)^2+\beta$ donc l'écriture proposée n'est pas celle d'une forme canonique de polynôme de degré 2. Il s'agit en fait ici d'une forme factorisée.

4) Le trinôme $-(x+3)^2-7$ peut être réécrit $-1(x-(-3))^2+(-7)$.
Il est donc de la forme $a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $a=-1$, $\alpha=-3$ et $\beta=-7$. L'écriture proposée est bien celle d'une forme canonique de trinôme du second degré.

5) Le trinôme $-4(x-9)^2$ peut être réécrit $-4(x-9)^2+0$.
Il est donc de la forme $a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $a=-4$, $\alpha=9$ et $\beta=0$. L'écriture proposée est bien celle d'une forme canonique de polynôme du second degré. Il s'agit aussi ici d'une forme factorisée.

6) Le trinôme $2x^2-5$ peut être réécrit $2(x-0)^2+(-5)$.
Il est donc de la forme $a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $a=2$, $\alpha=0$ et $\beta=-5$. L'écriture proposée est bien celle d'une forme canonique de trinôme du second degré. Il s'agit aussi ici d'une forme développée réduite.

Remarques :

- ✓ Si $\alpha=0$, la forme canonique est aussi la forme développée réduite du trinôme.
- ✓ Si $\beta=0$, la forme canonique est aussi une forme factorisée du trinôme.
- ✓ Dans les exercices, on est souvent amené à choisir l'une de ces 3 formes : développée, factorisée ou canonique.

Exercice 2 *(1 question)* — *Niveau : moyen*

Donner la forme canonique des trois trinômes du second degré suivants :

1) $2x^2+7x+3$
2) $3x^2-10x-8$
3) $-x^2+4x-5$

Correction de l'exercice 2

↻ Retour au menu

Rappel : Forme canonique d'un trinôme du second degré

Tout trinôme du second degré de la forme $f(x)=ax^2+bx+c$ (où a, b et c désignent des réels, avec $a\neq 0$) peut s'écrire sous sa forme canonique unique $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ $avec$ $\alpha=-\frac{b}{2a}$ et $\beta=f(\alpha)$.

Remarque : β est l'image de α par la fonction f.

1) Donnons la forme canonique du trinôme du second degré $2x^2+7x+3$.

Soit le trinôme du second degré $f(x)=2x^2+7x+3$.

$f(x)$ est de la forme $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a=2$, $b=7$ et $c=3$.

Ainsi,

$$\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{7}{2\times 2}=-\frac{7}{4}$$

$$\beta=f(\alpha)=f\left(-\frac{7}{4}\right)=2\times\left(-\frac{7}{4}\right)^2+7\times\left(-\frac{7}{4}\right)+3=2\times\frac{49}{16}-\frac{49}{4}+3=\frac{49}{8}-\frac{98}{8}+\frac{24}{8}=-\frac{25}{8}$$

Il résulte que :

$$f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta=2\left(x-\left(-\frac{7}{4}\right)\right)^2+\left(-\frac{25}{8}\right)=2\left(x+\frac{7}{4}\right)^2-\frac{25}{8}$$

2) Donnons la forme canonique du trinôme du second degré $3x^2-10x-8$.

Soit le trinôme du second degré $f(x)=3x^2-10x-8$.

$f(x)$ est de la forme $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a=3$, $b=-10$ et $c=-8$.

Ainsi,

$$\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{-10}{2\times 3}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$$

$$\beta=f(\alpha)=f\left(\frac{5}{3}\right)=3\times\left(\frac{5}{3}\right)^2-10\times\frac{5}{3}-8=3\times\frac{25}{9}-\frac{50}{3}-8=\frac{25}{3}-\frac{50}{3}-\frac{24}{3}=-\frac{49}{3}$$

Il résulte que :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta = 3\left(x - \left(\frac{5}{3}\right)\right)^2 + \left(-\frac{49}{3}\right) = 3\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{49}{3}$$

3) Donnons la forme canonique du trinôme du second degré $-x^2 + 4x - 5$.

Soit le trinôme du second degré $f(x) = -x^2 + 4x - 5$.

$f(x)$ est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = -1$, $b = 4$ et $c = -5$.

Ainsi,

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \times (-1)} = -\frac{4}{-2} = 2$$

$$\beta = f(\alpha) = f(2) = -2^2 + 4 \times 2 - 5 = -4 + 8 - 5 = -1$$

Il résulte que :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta = -1(x-2)^2 + (-1) = -(x-2)^2 - 1$$

Exercice 3 *(1 question)* — *Niveau : difficile*

Factoriser, si possible, les trinômes du second degré suivants :

1) $x^2 + 5x - 14$
2) $-3x^2 + 3x + 36$
3) $2x^2 + 4x + 7$

Correction de l'exercice 3

↻ *Retour au menu*

Tout d'abord, remarquons que, pour chacune des écritures proposées, aucune factorisation ne semble possible à l'aide des identités remarquables connues, à savoir $A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2$, $A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2$ et $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$. D'où la nécessité d'utiliser la forme canonique.

Point-méthode : Factorisation d'un trinôme du second degré

Tout trinôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ (où a, b et c désignent des réels, avec $a \neq 0$) n'est pas factorisable.

Pour savoir s'il est possible de factoriser un trinôme du second degré, il faut d'abord en chercher la forme canonique $a(x-\alpha)^2 + \beta$ puis comparer a et β.

- ✓ Si $\beta = 0$ ou si a et β sont de signes contraires, alors le trinôme est factorisable.
- ✓ Sinon, le trinôme n'est pas factorisable.

1) Soit le trinôme du second degré $f(x) = x^2 + 5x - 14$.

$f(x)$ est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = 5$ et $c = -14$.

Ainsi,

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2 \times 1} = -\frac{5}{2}$$

$$\beta = f(\alpha) = f\left(-\frac{5}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 5 \times \left(-\frac{5}{2}\right) - 14 = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} - 14 = \frac{25}{4} - \frac{50}{4} - \frac{56}{4} = -\frac{81}{4}$$

Il résulte que :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta = 1\left(x - \left(-\frac{5}{2}\right)\right)^2 + \left(-\frac{81}{4}\right) = \underbrace{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{81}{4}}_{forme\ canonique}$$

$a = 1$ et $\beta = -\frac{81}{4}$ donc a et β sont de signes contraires. Le trinôme $x^2 + 5x - 14$ est donc factorisable.

Or, on peut remarquer que : $\frac{81}{4} = \left(\frac{9}{2}\right)^2$, d'où :

$$f(x) = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{81}{4} = \underbrace{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2}_{A^2} - \underbrace{\left(\frac{9}{2}\right)^2}_{B^2} \underbrace{=}_{\substack{on\ applique \\ l'identité\ remarquable \\ A^2-B^2=(A-B)(A+B)}} \left(\underbrace{x+\frac{5}{2}}_{A} - \underbrace{\frac{9}{2}}_{B}\right)\left(\underbrace{x+\frac{5}{2}}_{A} + \underbrace{\frac{9}{2}}_{B}\right) = \underbrace{(x-2)(x+7)}_{forme\ factorisée}$$

$(x-2)(x+7)$ est une forme factorisée de $x^2+5x-14$.

2) Soit le trinôme du second degré $f(x) = -3x^2+3x+36$.

On peut remarquer dans un premier temps que chacun des termes est divisible par -3 et par conséquent factoriser $f(x)$ par -3.

$f(x) = -3x^2+3x+36 = -3\times x^2 - 3\times(-x) - 3\times(-12) = -3(x^2-x-12)$

Notons $g(x)$ le trinôme $g(x) = x^2-x-12$. Alors $f(x) = -3(x^2-x-12) = -3g(x)$. Factorisons $g(x)$.

$g(x)$ est de la forme $g(x) = ax^2+bx+c$ avec $a=1$, $b=-1$ et $c=-12$.

Ainsi,

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2\times 1} = \frac{1}{2}$$

$$\beta = g(\alpha) = g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 12 = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} - \frac{48}{4} = -\frac{49}{4}$$

Il résulte que :

$$g(x) = a(x-\alpha)^2+\beta = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{49}{4}\right) = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}$$

$a=1$ et $\beta = -\frac{49}{4}$ donc a et β sont de signes contraires. Le trinôme $g(x)$ est donc factorisable.

Or, on remarque que $\frac{49}{4} = \left(\frac{7}{2}\right)^2$, d'où :

$$g(x) = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} = \underbrace{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}_{A^2} - \underbrace{\frac{7^2}{2}}_{B^2} = \left(\underbrace{x-\frac{1}{2}}_{A} - \underbrace{\frac{7}{2}}_{B}\right)\left(\underbrace{x-\frac{1}{2}}_{A} + \underbrace{\frac{7}{2}}_{B}\right) = \left(x-\frac{8}{2}\right)\left(x+\frac{6}{2}\right) = (x-4)(x+3)$$

Il résulte que $f(x) = -3g(x) = -3(x-4)(x+3)$. Autrement dit, $-3(x-4)(x+3)$ est une forme factorisée de $-3x^2+3x+36$.

3) Soit le trinôme du second degré $f(x) = 2x^2+4x+7$.

$f(x)$ est de la forme $f(x) = ax^2+bx+c$ avec $a=2$, $b=4$ et $c=7$.

Ainsi,

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \times 2} = -1$$

$$\beta = f(\alpha) = f(-1) = 2 \times (-1)^2 + 4 \times (-1) + 7 = 2 \times 1 - 4 + 7 = 5$$

Il résulte que :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta = 2\big(x-(-1)\big)^2 + 5 = 2(x+1)^2 + 5$$

$a = 2$ et $\beta = 5$ donc a et β sont de même signe. Le trinôme $2x^2 + 4x + 7$ n'est donc pas factorisable.

Exercice 4 *(1 question)* — *Niveau : difficile*

Donner, si elles existent, les racines des trinômes du second degré suivants :

1) $x^2 - 2x - 8$ 2) $-5x^2 + 4x - 3$ 3) $2x^2 - 4x - 5$

Correction de l'exercice 4

↻ *Retour au menu*

Rappel : Racine(s) d'un trinôme du second degré

On appelle racines (ou zéros) d'un trinôme du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ (où a, b et c désignent des réels, avec $a \neq 0$) les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Pour savoir si un trinôme du second degré admet des racines, il faut d'abord en chercher la forme canonique $a(x-\alpha)^2 + \beta$ puis comparer a et β.

- ✓ Si $\beta = 0$, alors le trinôme admet une racine réelle, qui est α.
- ✓ Si a et β sont de signes contraires, alors le trinôme admet deux racines réelles distinctes.
- ✓ Si a et β sont de même signe, alors le trinôme n'admet pas de racine réelle.

Remarque : Ne pas confondre racine (d'un trinôme) et racine carrée (d'un réel).

1) Soit le trinôme du second degré $f(x) = x^2 - 2x - 8$.

$f(x)$ est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = -2$ et $c = -8$.

Ainsi,

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \times 1} = 1$$

$$\beta = f(\alpha) = f(1) = 1^2 - 2 \times 1 - 8 = 1 - 2 - 8 = -9$$

Il résulte que :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta = 1(x-1)^2 + (-9) = (x-1)^2 - 9$$

$a = 1$ et $\beta = -9$ donc a et β sont de signes contraires. Le trinôme $x^2 - 2x - 8$ est donc factorisable et admet deux racines réelles distinctes.

Or, on remarque que : $9 = 3^2$, d'où :

$$f(x) = (x-1)^2 - 9 = \underbrace{(x-1)^2}_{A^2} - \underbrace{3^2}_{B^2} \underbrace{=}_{\substack{\text{on applique} \\ l'\text{identité remarquable} \\ A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)}} \left(\underbrace{x-1}_{A} - \underbrace{3}_{B}\right)\left(\underbrace{x-1}_{A} + \underbrace{3}_{B}\right) = (x-4)(x+2)$$

$(x-4)(x+2)$ est la forme factorisée réduite de $x^2 - 2x - 8$.

Or, l'équation $(x-4)(x+2)=0$ équivaut à $x-4=0$ ou $x+2=0$ (en effet, un produit de facteurs est nul si et seulement l'un des facteurs au moins est nul), c'est-à-dire $x=4$ ou $x=-2$. Le trinôme x^2-2x-8 admet donc deux racines : 4 et -2.

2) Soit le trinôme du second degré $f(x)=-5x^2+4x-3$.

$f(x)$ est de la forme $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a=-5$, $b=4$ et $c=-3$.

Ainsi,

$$\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2\times(-5)}=\frac{2}{5}$$

$$\beta=f(\alpha)=f\left(\frac{2}{5}\right)=-5\times\left(\frac{2}{5}\right)^2+4\times\frac{2}{5}-3=-5\times\frac{4}{25}+\frac{8}{5}-3=-\frac{4}{5}+\frac{8}{5}-\frac{15}{5}=-11$$

Il résulte que :

$$f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta=-5\left(x-\frac{2}{5}\right)^2+(-11)=-5\left(x-\frac{2}{5}\right)^2-11$$

$a=-5$ et $\beta=-11$ donc a et β sont de même signe. Le trinôme $=-5x^2+4x-3$ n'est donc pas factorisable et n'admet pas de racine réelle.

3) Soit le trinôme du second degré $f(x)=2x^2-4x-5$.

$f(x)$ est de la forme $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a=2$, $b=-4$ et $c=-5$.

Ainsi,

$$\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2\times 2}=1$$

$$\beta=f(\alpha)=f(1)=2\times 1^2-4\times 1-5=-7$$

Il résulte que :

$$f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta=2(x-1)^2+(-7)=2(x-1)^2-7$$

$a=1$ et $\beta=-7$ donc a et β sont de signes contraires. Le trinôme $2x^2-4x-5$ est donc factorisable et admet deux racines réelles distinctes.

Or, on remarque que :

$$f(x)=2(x-1)^2-7=\underbrace{2\left[(x-1)^2-\frac{7}{2}\right]}_{factorisation\ par\ 2}=2\left[\underbrace{(x-1)^2}_{A^2}-\underbrace{\sqrt{\frac{7}{2}}^{\,2}}_{B^2}\right]=2\left[\left(\underbrace{x-1}_{A}-\underbrace{\sqrt{\frac{7}{2}}}_{B}\right)\left(\underbrace{x-1}_{A}+\underbrace{\sqrt{\frac{7}{2}}}_{B}\right)\right]$$

Or, l'équation $2\left[\left(x-1-\sqrt{\frac{7}{2}}\right)\left(x-1+\sqrt{\frac{7}{2}}\right)\right]=0$ équivaut à $x-1-\sqrt{\frac{7}{2}}=0$ ou $-1+\sqrt{\frac{7}{2}}=0$, c'est-à-dire à $x=1+\sqrt{\frac{7}{2}}$ ou $x=1-\sqrt{\frac{7}{2}}$. Le trinôme $2x^2-4x-5$ admet deux racines : $1+\sqrt{\frac{7}{2}}$ et $1-\sqrt{\frac{7}{2}}$.

Exercice 5 *(2 questions)* — *Niveau : difficile*

Factoriser les trinômes suivants puis donner leur signe selon les valeurs de x :

1) $2x^2 + 7x + 5$
2) $3x^2 - 6x + 7$
3) $-2x^2 - x + 3$

Correction de l'exercice 5

↻ *Retour au menu*

Point-méthode : Signe d'un trinôme du second degré

Pour déterminer le signe d'un trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$, on commence par chercher s'il est factorisable.

- ✓ Si le trinôme est factorisable, alors on étudie le signe des facteurs puis, éventuellement à l'aide d'un tableau de signes, le produit de ces facteurs.
- ✓ S'il n'est pas factorisable, alors le trinôme est du signe de a.

1) Soit le trinôme du second degré $f(x) = 2x^2 + 7x + 5$.

$f(x)$ est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = 2$, $b = 7$ et $c = 5$.

Ainsi,

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{7}{2 \times 2} = -\frac{7}{4}$$

$$\beta = f(\alpha) = f\left(-\frac{7}{4}\right) = 2 \times \left(-\frac{7}{4}\right)^2 + 7 \times \left(-\frac{7}{4}\right) + 5 = 2 \times \frac{49}{16} - \frac{49}{4} + 5 = \frac{49}{8} - \frac{98}{8} + \frac{40}{8} = -\frac{9}{8}$$

Il résulte que :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta = 2\left(x - \left(-\frac{7}{4}\right)\right)^2 + \left(-\frac{9}{8}\right) = 2\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$$

$a = 2$ et $\beta = -\frac{9}{8}$ donc a et β sont de signes contraires. Le trinôme $2x^2 + 7x + 5$ est donc factorisable et admet deux racines réelles distinctes.

Or,

$$f(x) = 2\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{9}{8} = \underbrace{2\left[\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right]}_{factorisation\ par\ 2} = 2\left[\underbrace{\left(x + \frac{7}{4}\right)^2}_{A^2} - \underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^2}_{B^2}\right] = 2\left[\left(\underbrace{x + \frac{7}{4}}_{A} - \underbrace{\frac{3}{4}}_{B}\right)\left(\underbrace{x + \frac{7}{4}}_{A} + \underbrace{\frac{3}{4}}_{B}\right)\right]$$

$$= 2(x+1)\left(x + \frac{5}{2}\right)$$

$2(x+1)\left(x+\frac{5}{2}\right)$ est une forme factorisée du trinôme $2x^2+7x+5$, dont on peut, à l'aide d'un tableau de signes, déterminer le signe suivant les valeurs de x. Remarquons tout d'abord que les racines du trinôme sont -1 et $-\frac{5}{2}$ car $2(x+1)\left(x+\frac{5}{2}\right)=0$ équivaut à $x+1=0$ ou $x+\frac{5}{2}=0$, c'est-à-dire à $x=-1$ ou $x=-\frac{5}{2}$.

Rappel : Tableau de signes et règle des signes

Un tableau de signes est un tableau qui permet de déterminer le signe d'une expression algébrique factorisée, en appliquant la règle des signes.

- ✓ Un nombre positif multiplié à un nombre positif donne un résultat positif.
- ✓ Un nombre négatif multiplié à un nombre positif donne un résultat négatif.
- ✓ Un nombre négatif multiplié à un nombre négatif donne un résultat positif.

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+\frac{5}{2}$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$2(x+1)\left(x+\frac{5}{2}\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le trinôme est nul pour $\underbrace{x \in \left\{-\frac{5}{2}\,;\,-1\right\}}_{x=-\frac{5}{2}\text{ ou } x=-1}$, strictement positif pour tout $x \in \left]-\infty\,;\,-\frac{5}{2}\right[\cup \left]-1\,;\,+\infty\right[$ et strictement négatif pour $x \in \left]-\frac{5}{2}\,;\,-1\right[$.

2) Soit le trinôme du second degré $f(x)=3x^2-6x+7$.

$f(x)$ est de la forme $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a=3$, $b=-6$ et $c=7$.

Ainsi,

$$\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{-6}{2\times 3}=1$$

$$\beta=f(\alpha)=f(1)=3\times 1^2-6\times 1+7=4$$

Il résulte que :

$$f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta=3(x-1)^2+4$$

$a=3$ et $\beta=4$ donc a et β sont de même signe. Le trinôme $3x^2-6x+7$ n'est donc pas factorisable et est du signe de a. Autrement dit, le trinôme est positif pour tout x réel.

Remarque : On peut observer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x-1)^2 \geq 0$ d'où $3(x-1)^2 \geq 0$ et $3(x-1)^2+4>0$

3) Soit le trinôme du second degré $f(x) = -2x^2 - x + 3$.

$f(x)$ est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = -2$, $b = -1$ et $c = 3$.

Ainsi,

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2 \times (-2)} = -\frac{1}{4}$$

$$\beta = f(\alpha) = f\left(-\frac{1}{4}\right) = -2 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^2 - \left(-\frac{1}{4}\right) + 3 = -2 \times \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + 3 = -\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{24}{8} = \frac{25}{8}$$

Il résulte que :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta = -2\left(x - \left(-\frac{1}{4}\right)\right)^2 + \frac{25}{8} = -2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{25}{8}$$

$a = -2$ et $\beta = \frac{25}{8}$ donc a et β sont de signes contraires. Le trinôme $-2x^2 - x + 3$ est donc factorisable et admet deux racines réelles distinctes.

$$f(x) = -2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{25}{8} = -2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 - 2 \times \left(-\frac{25}{16}\right) = \underbrace{-2\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right]}_{factorisation\ par\ -2} = -2\left[\underbrace{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2}_{A^2} - \underbrace{\left(\frac{5}{4}\right)^2}_{B^2}\right]$$

$$= -2\left[\left(\underbrace{x+\frac{1}{4}}_{A} - \underbrace{\frac{5}{4}}_{B}\right)\left(\underbrace{x+\frac{1}{4}}_{A} + \underbrace{\frac{5}{4}}_{B}\right)\right] = -2(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)$$

$-2(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)$ est une forme factorisée du trinôme $-2x^2 - x + 3$. Après avoir observé que les racines de ce trinôme sont 1 et $-\frac{3}{2}$, déterminons-en le signe, à l'aide d'un tableau de signes, suivant les valeurs de x.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+\frac{3}{2}$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Attention ! -2 est un nombre négatif et il ne faut pas oublier ce facteur négatif dans l'étude du signe.

Le trinôme est nul pour $\underbrace{x \in \left\{-\frac{3}{2}\ ;\ 1\right\}}_{x=-\frac{3}{2}\ ou\ x=1}$, strictement négatif pour tout $x \in \left]-\infty\ ;\ -\frac{3}{2}\right[\cup]1\ ;\ +\infty[$ et strictement positif pour $x \in \left]-\frac{3}{2}\ ;\ 1\right[$.

Exercice 6 *(4 questions)* — *Niveau : moyen*

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x-3)^2 + 4$.

1) Dresser le tableau de variation de f.
2) Préciser le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
3) Sans calculer, comparer si possible :
   a) $f(-1)$ et $f(2)$ b) $f(4)$ et $f(5)$ c) $f(-2)$ et $f(6)$
4) On désigne par λ un réel de l'intervalle $]-\infty\,;3]$. Comparer $f(\lambda)$ et $f(\lambda - 1)$.

Correction de l'exercice 6

↻ *Retour au menu*

Rappel : Représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré

Soit f une fonction polynôme du second degré, définie par $(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R})$.

Sa représentation graphique dans un repère orthonormé est une **parabole** :

✓ « tournée vers le haut » si $a > 0$. Dans ce cas, la fonction f est décroissante puis croissante et admet un minimum atteint lorsque $x = \alpha = -\frac{b}{2a}$

✓ « tournée vers le bas » si $a < 0$. Dans ce cas, la fonction f est croissante puis décroissante et admet un maximum atteint lorsque $x = \alpha = -\frac{b}{2a}$

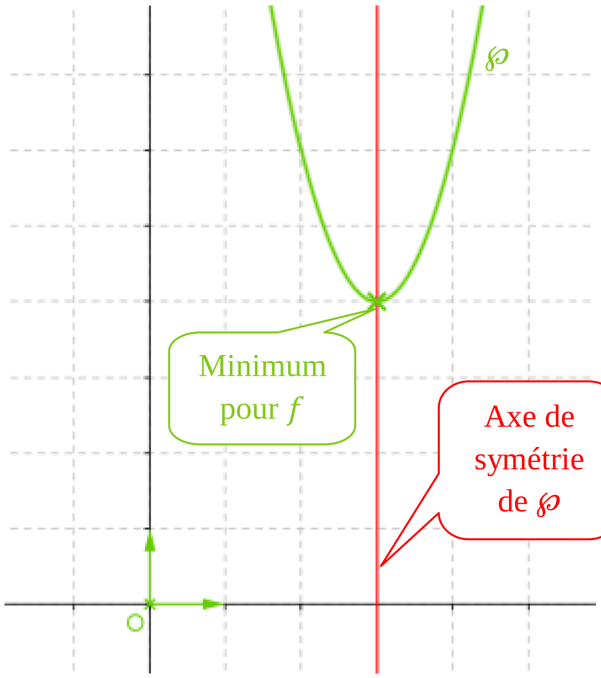
Toute parabole admet un **axe de symétrie** parallèle à l'axe des ordonnées, d'équation $x = \alpha = -\frac{b}{2a}$.

1) Dressons le tableau de variation de f.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x-3)^2 + 4$.

$2(x-3)^2 + 4$ est de la forme $a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a = 2$, $\alpha = 3$ et $\beta = 4$. Comme $a > 0$, la fonction f est décroissante puis croissante et admet un minimum atteint pour $x = \alpha = 3$. Il vient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	↘	4	↗



Justifions que l'image de 3 par f est 4 :

$f(3) = 2 \times (3-3)^2 + 4 = 2 \times 0 + 4 = 4$.

Remarque importante : On retrouve la valeur de β.

Rappel : Sens de variation d'une fonction (croissance / décroissance)

Soit f une fonction définie sur D_f et soit I un intervalle contenu dans D_f.

- ✓ f est strictement croissante sur I si et seulement si, pour tous nombres x et x' tels que $x < x'$, alors $f(x) < f(x')$ *(autrement dit, une fonction croissante conserve l'ordre)*
- ✓ f est strictement décroissante sur I si et seulement si, pour tous nombres x et x' tels que $x < x'$, alors $f(x) > f(x')$ *(autrement dit, une fonction décroissante change l'ordre)*

Sens de variation des fonctions affines : Les fonctions affines de coefficient directeur positif sont croissantes alors que les fonctions affines de coefficient directeur négatif sont décroissantes.

2) Pour tout réel x, $f(x) = 2(x-3)^2 + 4$.

Or, $(x-3)^2 \geq 0$, d'où $2 \times (x-3)^2 \geq 2 \times 0$ (car la fonction $x \mapsto 2x$ est une fonction affine de coefficient directeur positif 2, donc croissante sur $\mathbb{R}$), c'est-à-dire $2(x-3)^2 \geq 0$.

Il vient ensuite que $2(x-3)^2 + 4 \geq 0 + 4$ (car la fonction $x \mapsto x + 4$ est une fonction affine de coefficient directeur positif 1, donc croissante sur $\mathbb{R}$), c'est-à-dire $f(x) \geq 4 > 0$.

La fonction f est donc strictement positive pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3)

a) Comparons $f(-1)$ et $f(2)$.

On a $-1 < 2$ et f décroissante sur $]-\infty\,;3]$ donc sur $[-1\,;2]$. Par conséquent, $f(-1) > f(2)$ (on change le sens de l'inégalité en vertu de la décroissance de la fonction).

b) Comparons $f(4)$ et $f(5)$.

On a $4 < 5$ et f croissante sur $[3\,;+\infty[$ donc sur $[4\,;5]$. Par conséquent, $f(4) < f(5)$ (on conserve le sens de l'inégalité en vertu de la croissance de la fonction).

c) Comparons $f(-2)$ et $f(6)$.

On a $-2 < 6$. Or $-2 \in]-\infty\,;3]$, intervalle sur lequel f est décroissante et $6 \in [3\,;+\infty[$, intervalle sur lequel f est croissante. Par conséquent, il n'est pas possible de comparer $f(-2)$ et $f(6)$.

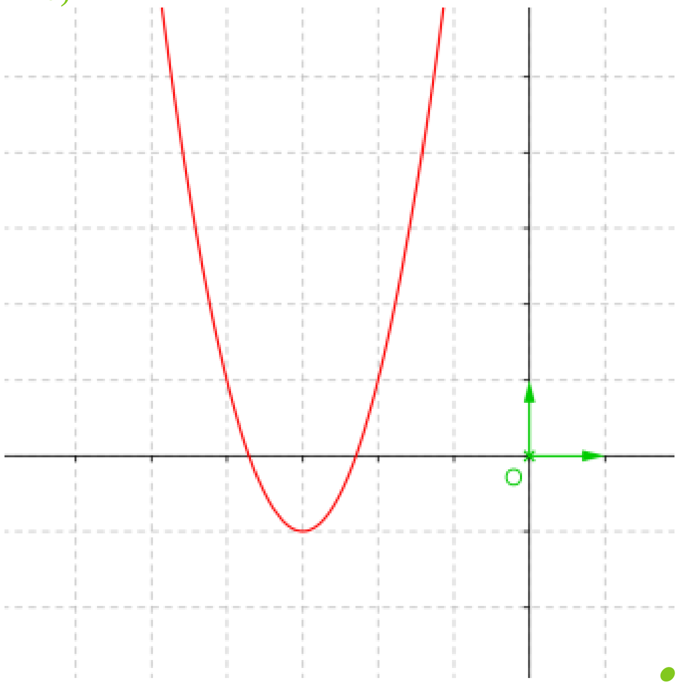
4) Soit λ un réel de l'intervalle $]-\infty\,;3]$. Comparons $f(\lambda)$ et $f(\lambda-1)$.

Pour tout $\lambda \in]-\infty\,;3]$, $\lambda - 1 < \lambda \leq 3$. Or, f est décroissante sur $]-\infty\,;3]$ donc $f(\lambda-1) > f(\lambda) \geq f(3)$, c'est-à-dire $4 \leq f(\lambda) < f(\lambda-1)$.

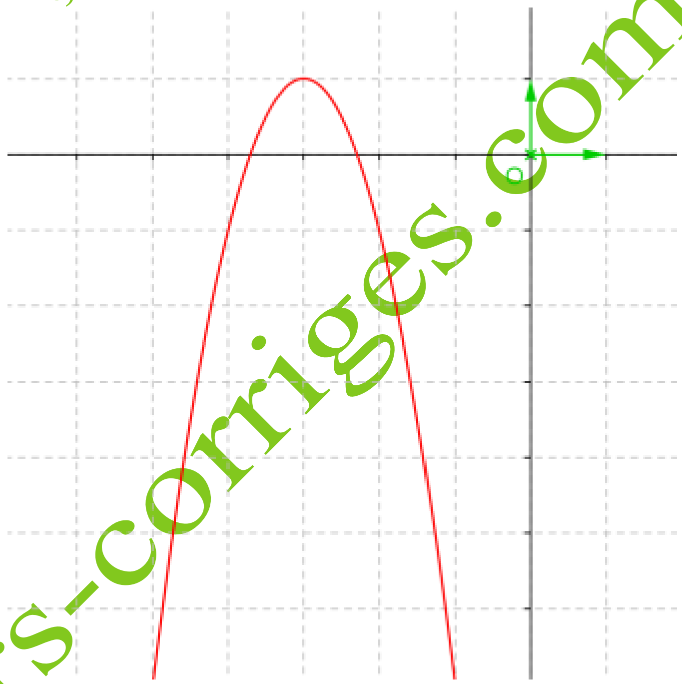
Sans effectuer de calcul, associer à chaque fonction la représentation graphique correspondante.

Représentations graphiques

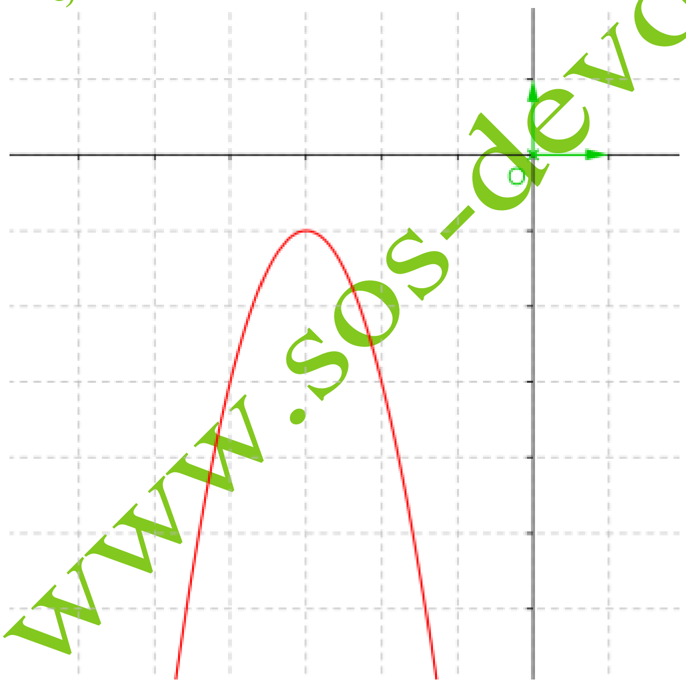
a)



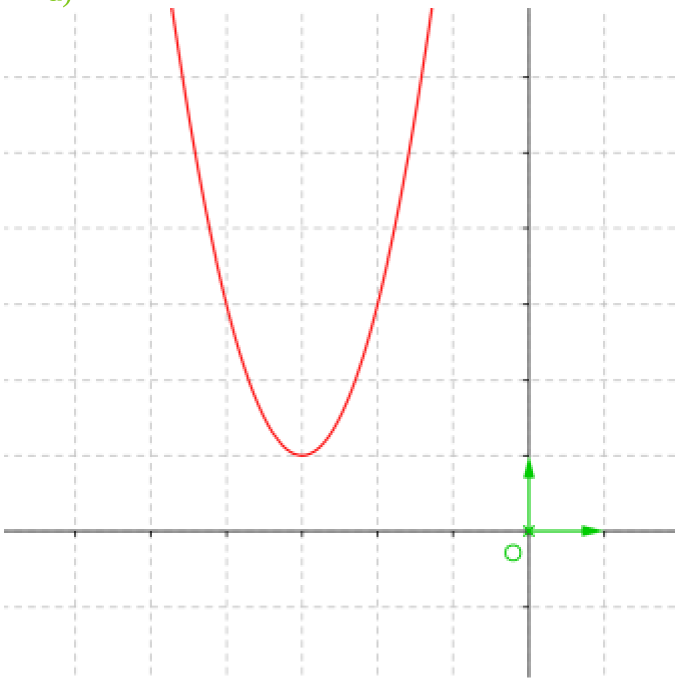
b)



c)



d)



Fonctions

1) $f_1 : x \mapsto -2(x+3)^2 - 1$
2) $f_2 : x \mapsto -2(x+3)^2 + 1$
3) $f_3 : x \mapsto 2(x+3)^2 - 1$
4) $f_4 : x \mapsto 2(x+3)^2 + 1$

Rappel : Coordonnées du sommet d'une parabole

Soit f une fonction polynôme du second degré, définie par sa forme canonique $(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ $(a \in \mathbb{R}^*, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R})$.

Sa représentation graphique dans un repère orthonormé est une **parabole** de sommet $S(\alpha\ ;\ \beta)$.

1) La fonction f_1 est définie par $f_1(x) = -2(x+3)^2 - 1$.

$f_1(x)$ est de la forme $a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a = -2$, c'est-à-dire $a < 0$. Donc la parabole associée est « tournée vers le bas ». Or, deux paraboles répondent à ce critère, les paraboles b) et c), donc il convient de pousser les investigations !

On peut remarquer en outre que $\alpha = -3$ et $\beta = -1$ donc la parabole associée a pour sommet le point de coordonnées $(-3\ ;\ -1)$. Parmi les paraboles b) et c), seule la parabole c) satisfait à ce critère.

On peut donc associer la fonction f_1 à la parabole c).

2) La fonction f_2 est définie par $f_2(x) = -2(x+3)^2 + 1$.

$f_2(x)$ est de la forme $a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a = -2$, c'est-à-dire $a < 0$. Donc la parabole associée est « tournée vers le bas ». Or, il ne reste que la parabole b) qui satisfait à ce critère.

Par conséquent, la fonction f_2 est à associer à la parabole b).

3) La fonction f_3 est définie par $f_3(x) = 2(x+3)^2 - 1$.

$f_3(x)$ est de la forme $a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a = 2$, $\alpha = -3$ et $\beta = -1$. La parabole associée est donc « tournée vers le haut » et a pour sommet le point de coordonnées $(-3\ ;\ -1)$. Parmi les paraboles restantes, seule la parabole a) remplit ce critère.

On peut donc associer à la fonction f_3 à la parabole a).

4) Par élimination, la fonction f_4 définie par $f_4(x) = 2(x+3)^2 + 1$ est associée à la parabole d).

En effet $f_4(x)$ est de la forme $a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a = 2$, $\alpha = -3$ et $\beta = 1$. Donc la parabole associée est « tournée vers le haut » et de sommet $S(-3\ ;\ 1)$. Seule la parabole d) répond à ces deux exigences.

Exercice 8 *(6 questions)* *Niveau : moyen*

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 9 - 2(x-3)(x+2)$.

1) Développer et réduire $f(x)$.
2) Quelle est sa forme canonique ?
3) Factoriser $f(x)$.
4) Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 0$.
5) Résoudre l'équation $f(x) = 4$.
6) Résoudre l'inéquation $f(x) > 3$.

Correction de l'exercice 8 ↻ *Retour au menu*

1) Pour tout x réel,

$f(x) = x^2 - 9 - 2(x-3)(x+2) = x^2 - 9 - 2(x^2 + 2x - 3x - 6) = x^2 - 9 - 2(x^2 - x - 6)$

$= x^2 - 9 - 2x^2 + 2x + 12 = -x^2 + 2x + 3$

$-x^2 + 2x + 3$ est la forme développée réduite de $f(x)$.

2) Donnons la forme canonique du trinôme $f(x)$.

$-x^2 + 2x + 3$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -1$, $b = 2$ et $c = 3$.

Ainsi,

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \times (-1)} = 1$$

$$\beta = f(\alpha) = f(1) = -1^2 + 2 \times 1 + 3 = -1 + 2 + 3 = 4$$

Il résulte que :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta = -(x-1)^2 + 4$$

$-(x-1)^2 + 4$ est la forme canonique de $f(x)$.

3) Factorisons $f(x)$.

1ère méthode : factorisation à l'aide de la forme canonique

D'après 2), $f(x) = -(x-1)^2 + 4 = 4 - (x-1)^2 = \underbrace{2^2}_{A^2} - \underbrace{(x-1)^2}_{B^2} = \left[\underbrace{2}_{A} - \underbrace{(x-1)}_{B}\right]\left[\underbrace{2}_{A} + \underbrace{(x-1)}_{B}\right]$

$= (2 - x + 1)(2 + x - 1) = (3-x)(x+1)$

2ème méthode : factorisation à l'aide d'un facteur commun

Pour tout x réel, $f(x)=x^2-9-2(x-3)(x+2)=x^2-3^2-2(x-3)(x+2)$

$=\underline{(x-3)}(x+3)-2\underline{(x-3)}(x+2)=\underbrace{(x-3)}_{facteur\ commun}[(x+3)-2(x+2)]=(x-3)(x+3-2x-4)$

$=(x-3)(-x-1)=(x-3)(-(x+1))=-(x-3)(x+1)=(-x+3)(x+1)=(3-x)(x+1)$

4) Résolvons l'inéquation $f(x)\leq 0$.

D'après 3), $f(x)=(3-x)(x+1)$. Or, $f(x)=0$ si et seulement si $3-x=0$ ou $x+1=0$, c'est-à-dire si et seulement si $x=3$ ou $x=-1$. Dressons désormais un tableau de signes de $f(x)$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$3-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(3-x)(x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x)\leq 0$ est donc $]-\infty\,;-1]\cup[3\,;+\infty[$.

5) Résolvons l'équation $f(x)=4$.

D'après 2), $f(x)=-(x-1)^2+4$. Par conséquent, $f(x)=4$ équivaut à $-(x-1)^2+4=4$, c'est-à-dire à $-(x-1)^2=0$. Cette équation admet pour unique solution 1.

L'ensemble des solutions de l'équation $f(x)=4$ est donc $\{1\}$.

6) Résolvons l'inéquation $f(x)>3$.

D'après 1), $f(x)=-x^2+2x+3$.

Ainsi, $f(x)>3$ équivaut à $-x^2+2x+3>3$, c'est-à-dire à $-x^2+2x>0$.

Or, $-x^2+2x=-x\times x+2\times x=x(-x+2)$. Il vient alors que $f(x)>3$ équivaut à $x(-x+2)>0$. Dressons un tableau de signes.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$-x+2$		$+$	|	$+$	0	$-$	
x		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x(-x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x)>3$ est donc $]0\,;\,2[$.

Exercice 9 *(1 question)* — *Niveau : moyen*

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ et représentée dans un repère orthonormé par $\wp$. Ecrire un algorithme donnant les coordonnées du sommet de $\wp$ et renvoyant un message d'erreur si l'utilisateur saisit 0 comme valeur de a.

Correction de l'exercice 9 — ↻ *Retour au menu*

```
VARIABLES
    a EST_DU_TYPE NOMBRE (on déclare la variable a, coefficient de x²)
    b EST_DU_TYPE NOMBRE (on déclare la variable b, coefficient de x)
    c EST_DU_TYPE NOMBRE
    alpha EST_DU_TYPE NOMBRE (on appelle alpha l'abscisse du sommet de la parabole)
    beta EST_DU_TYPE NOMBRE (on appelle beta l'ordonnée du sommet de la parabole)
DEBUT_ALGORITHME
    AFFICHER "Soit une parabole d'équation y=ax²+bx+c."
    AFFICHER "Donner la valeur de a : "
    LIRE a
    AFFICHER a
    AFFICHER "Donner la valeur de b : "
    LIRE b
    AFFICHER b
    AFFICHER "Donner la valeur de c : "
    LIRE c
    AFFICHER c
    SI (a==0) ALORS (on envisage le cas où serait saisie la valeur 0 pour a, cas où l'écriture n'est pas celle d'une parabole)
        DEBUT_SI
        AFFICHER "Vous n'avez pas proposé l'écriture d'une parabole."
        FIN_SI
        SINON (cas où a est bien différent de 0)
            DEBUT_SINON
            alpha PREND_LA_VALEUR -b/(2*a) (calcul de l'abscisse alpha du sommet)
            beta PREND_LA_VALEUR a*pow(alpha,2)+b*alpha+c (calcul de l'ordonnée beta du sommet)
            AFFICHER "La parabole a pour sommet (alpha ; beta) avec :"
            AFFICHER "alpha = "
            AFFICHER alpha
            AFFICHER "beta = "
            AFFICHER beta
            FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

Pour vérifier si a est égal à 0, la condition à écrire est « a = = 0 »

Affichage lorsque l'utilisateur saisit 0, puis 2 et 7

Algorithme lancé
Soit une parabole d'équation y=ax²+bx+c.
Donner la valeur de a : 0
Donner la valeur de b : 2
Donner la valeur de c : 7
Vous n'avez pas proposé l'écriture d'une parabole.
Algorithme terminé

Affichage lorsque l'utilisateur saisit 2, puis −3 et 5

Algorithme lancé
Soit une parabole d'équation y=ax²+bx+c.
Donner la valeur de a : 2
Donner la valeur de b : -3
Donner la valeur de c : 5
La parabole a pour sommet (alpha ; beta) avec :
alpha = 0.75
beta = 3.875
Algorithme terminé