GÉNÉRALITÉS

Table des matières

★ ★ ★ ★ ★ ★

I Définitions

I.1 Vocabulaire

Définition 1
Une fonction est un procédé qui à un nombre x appartenant à un ensemble $\mathcal{D}$ associe un nombre y.
On note : $x \overset{f}{\mapsto} y$ ou encore $f : x \mapsto y$ ou encore $y = f(x)$.
On dit que y est l'image de x par la fonction f et que x est un antécédent de y par la fonction f.

Exemple 1
Soit g la fonction définie par $g(x) = x^2 + 3$.
- L'image de 5 est $g(5) = 5^2 + 3 = 28$,
- Les antécédents de 7 vérifient $g(x) = 7$ c'est à dire $x^2 + 3 = 7$ soit $x = -2$ ou $x = 2$,
- Il n'y a pas d'antécédent de 1 car l'équation $g(x) = 1$ n'a pas de solution : $x^2 + 3 = 1 \Longleftrightarrow x^2 = -2$.

Définition 2
Pour une fonction f donnée, l'ensemble de tous les nombres réels qui ont une image calculable par cette fonction est appelé ensemble de définition de la fonction f, que l'on notera $\mathcal{D}_f$.

Exemple 2
La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2x-4}$ a pour ensemble de définition $]-\infty; 2\,[\cup]\,2; +\infty[$.
- En effet, l'expression $\dfrac{1}{2x-4}$ n'a de sens que pour les valeurs de x telles que $2x - 4 \neq 0$ (car le dénominateur d'une fraction ne peut être égal à 0), c'est-à-dire pour $x \neq 2$,
- On dira aussi que 2 est une valeur interdite pour la fonction f.

Graphiquement, l'ensemble de définition est l'intervalle sur lequel la courbe existe.

I.2 Tableau de valeurs

Pour une fonction f, donnée on peut établir un tableau de valeurs.
Dans ce tableau, la première ligne contient des nombres réels x, et la seconde ligne contient leurs images respectives y.

Exemple 3
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + \dfrac{2}{x}$, on obtient le tableau suivant (grâce par exemple à une calculatrice) :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$-4,7$	$-3,7$	-3	-3	$\varnothing$	3	3	$3,7$

Dans tout le reste du chapitre, on munit le plan d'un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

I.3 Courbe représentative

Méthode pour tracer une courbe à partir d'une expression :

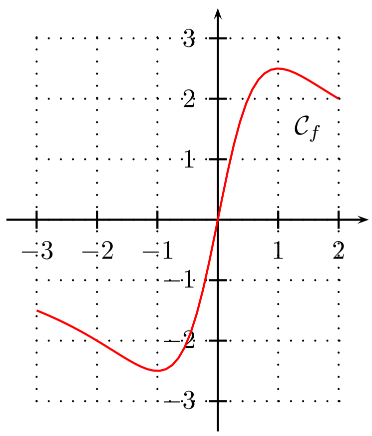
Définition 3
Dans un tel repère l'ensemble des points M de coordonnées $(x; f(x))$ forme la courbe représentative de la fonction f, souvent notée $\mathcal{C}_f$.

Exemple 4
On souhaite tracer la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{5x}{x^2+1}$.
On trace la portion de courbe représentative de f dont les abscisses sont comprises entre -3 et 2.

- On commence par compléter un tableau de valeurs :

x	-3	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$	2
$f(x)$	$-1,5$	$-1,7$	-2	$-2,3$	$-2,5$	-2	0	2	$2,5$	$2,3$	2

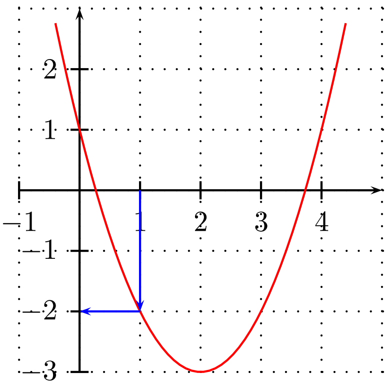
- Puis on place les points $M(x; f(x))$ dans le repère ci-dessous :



Le point de coordonnées $\begin{pmatrix} 10 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ n'est pas sur la courbe représentative de la fonction f car $f(10) = 0,495 \neq 0,5$.

Méthode pour lire une image ou un antécédent à partir d'une courbe :

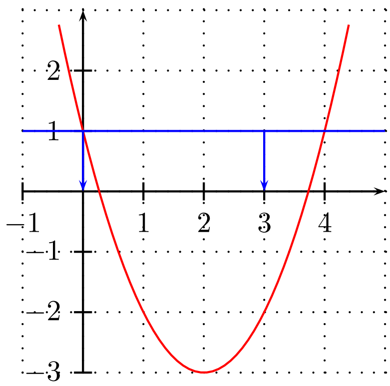
Lire l'image d'un nombre :



on place x sur l'axe des abscisses
on se déplace verticalement pour rencontrer $\mathcal{C}_f$
on lit $f(x)$ sur l'axe des ordonnées

L'image de 1 par f est -2.

Trouver l'(les)antécédent(s) d'un nombre



on trace une horizontale passant par cette valeur
à partir des points d'intersection, on se déplace verticalement vers l'axe des abscisses pour lire les antécédents

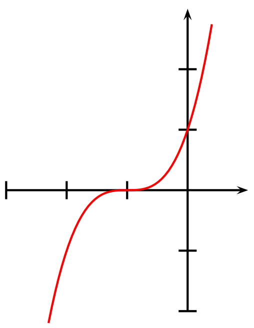
Les antécédents de 1 par f sont 0 et 4.

II Étude qualitative de fonctions

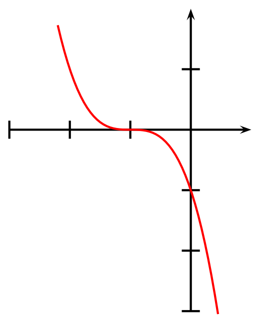
II.1 Sens de variation

Définition 4

- *On dit que la fonction f est <u>croissante</u> sur un intervalle I si quels que soient les réels x_1 et x_2 dans I tels que $x_1 \leq x_2$, on a $f(x_1) \leq f(x_2)$.*
  Autrement dit, les images de x_1 et de x_2 sont rangées dans le même ordre que x_1 et x_2.
- *On dit que la fonction f est <u>décroissante</u> sur un intervalle I si quels que soient les réels x_1 et x_2 dans I tels que $x_1 \leq x_2$, on a $f(x_1) \geq f(x_2)$.*
  Autrement dit, les images de x_1 et de x_2 sont rangées dans l'ordre inverse de x_1 et x_2.

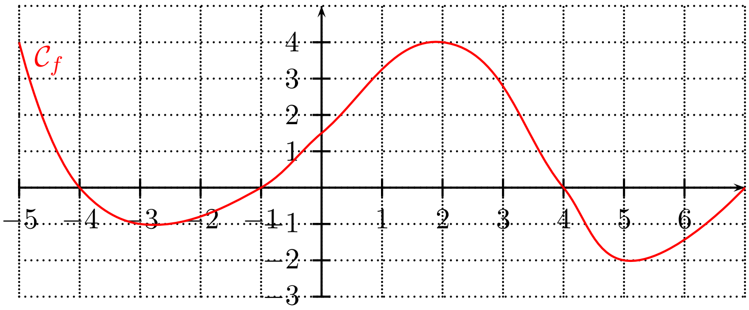


fonction croissante



fonction décroissante

Donner les variations d'une fonction signifie préciser sur quels intervalles la fonction est croissante, puis sur quels intervalles la fonction est décroissante.



Exemple 5

- Cette fonction est décroissante sur $[-5;-3]$, croissante sur $[-3;2]$, décroissante sur $[2;5]$, puis croissante $[5;7]$.
- Ou encore : f est croissante sur $[-3;2]$ et sur $[5;7]$, décroissante sur $[-5;-3]$ et sur $[2;5]$.

II.2 Tableau de variations

Le <u>tableau de variations</u> d'une fonction est un tableau synthétique regroupant les informations concernant les variations de la fonction.

Exemple 6
Le tableau de variations de la fonction f est :

x	-5		-3		2		5		7
$f(x)$	4	↘	-1	↗	4	↘	-2	↗	0

II.3 Extremum

Définition 5
On dit que la fonction f admet un <u>maximum</u> M [resp. <u>minimum</u> m] sur un intervalle I, atteint en x_0 si, quel que soit le réel x dans I, on a $f(x) \leq f(x_0) = M$ [resp. $f(x) \geq f(x_0) = m$].

Exemple 7

- Le maximum de f sur $[-5;7]$ est $M = 2$, atteint pour $x = -5$ et $x = 2$.
- Le minimum de f sur $[-5;7]$ est $m = -2$, atteint pour $x = 5$.

Attention, la valeur d'un extremum dépend de l'intervalle !
Par exemple, le minimum de f sur $[-5;2]$ est $m = -1$, atteint pour $x = -3$.

II.4 Tableau de signes

On réuni au sein d'un tableau appelé <u>tableau de signes</u> les informations concernant le signe de la fonction f, c'est à dire sa position par rapport à l'axe des abscisses

Exemple 8
Le tableau de signes de la fonction f est :

x	-5		-4		-1		4		7
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0