GÉOMÉTRIE VECTORIELLE

Table des matières

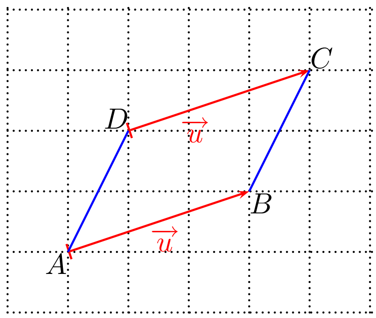
★ ★ ★ ★ ★ ★

I Définition

Définition 1

- *Un point C est l'image d'un point D par la translation qui transforme A en B lorsque le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.*
- *On dit alors que C est l'image du point D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.*

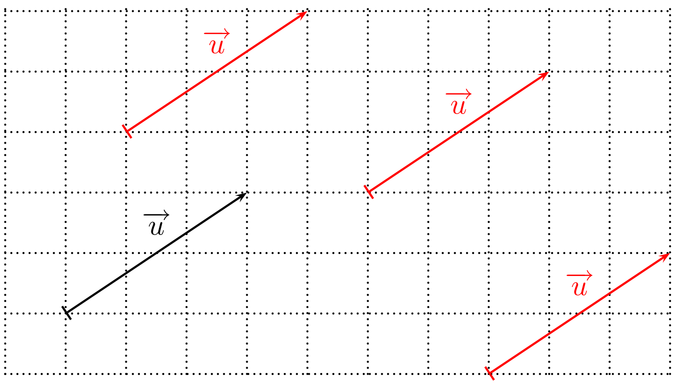
Translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ transformant D en C :



On remarque que :
- (AB) et (DC) sont parallèles (même direction),
- AB et DC sont de même longueur,
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ vont dans le même sens.

Les vecteurs seront souvent notés $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$...

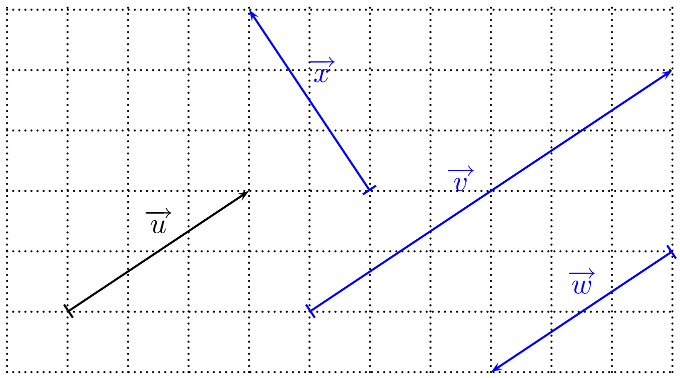
Remarque 1
Le vecteur $\overrightarrow{u}$ n'est pas fixe, on peut le dessiner n'importe où sur une feuille :



II Égalité de vecteurs

Définition 2
Deux vecteurs AB et DC sont égaux si et seulement si le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme (éventuellement aplati). On note alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Aucun des vecteurs ci-contre ne sont égaux deux à deux.



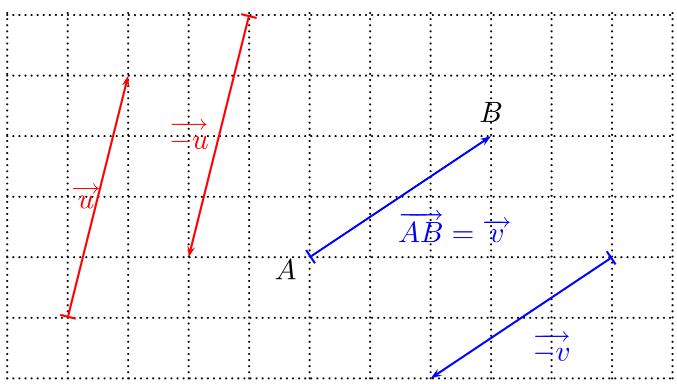
Remarque 2

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $A = B$,
- Si on fixe un point O, alors pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un unique point M vérifiant $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$.

III Opposé d'un vecteur

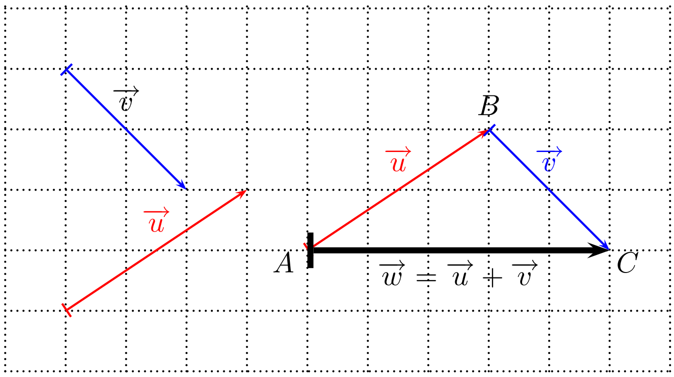
Définition 3
Quels que soient les points A et B, le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est appelé vecteur opposé au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Remarque 3
Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, alors $-\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BA}$.



IV Somme de deux vecteurs

Définition 4
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs, on définit le vecteur $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ de la façon suivante :
Soit A un point du plan, on trace le représentant de $\overrightarrow{u}$ d'origine A : il a pour extrémité B,
puis on trace le représentant de $\overrightarrow{v}$ d'origine B : il a pour extrémité C.
Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est un représentant du vecteur $\overrightarrow{w}$.



Relation de Chasles : Pour tous points A, B et C du plan, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Propriété 1
Quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ du plan, on a :

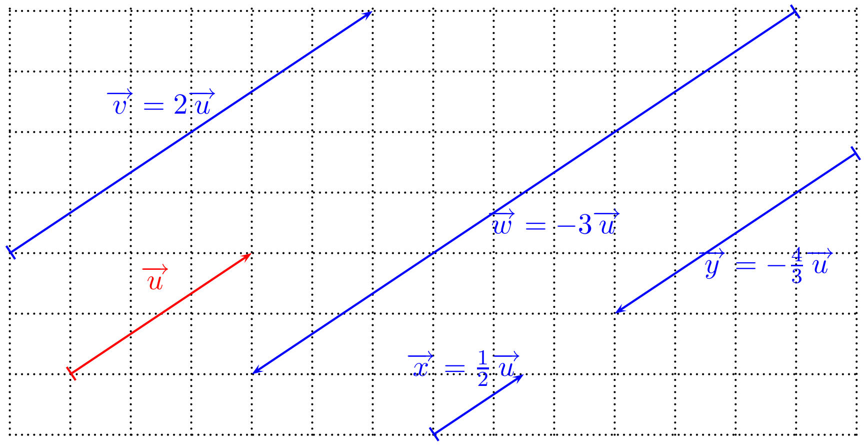
- $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$,
- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$,
- $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$.

V Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

Définition 5
Soit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul et k un réel non nul, on définit le vecteur $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AC}$ par :

- *A, B et C sont alignés,*
- *si $k > 0$, $AC = kAB$ et B et C sont du même côté par rapport à A,*
- *Si $k < 0$, $AC = -kAB$ et B et C sont de part et d'autre de A.*

Remarque 4
Si $\overrightarrow{u} = 0$ ou $k = 0$ alors $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$



Propriété 2
Quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et les réels k et l , on a :

- $k(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$
- $(k + l)\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + l\overrightarrow{u}$
- $k(\lambda\overrightarrow{u}) = (k\lambda)\overrightarrow{u}$
- $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \iff k = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

VI Colinéarité de deux vecteurs

Définition 6
Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.

Autrement dit, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont la même direction.

Sur le dessin précédent, tous les vecteurs dessinés sont colinéaires entre eux.

Propriété 3

- Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires,
- deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.