Ensembles de nombres
Intervalles dans R

1. Différents ensembles de nombres

1.1) Introduction : des nombres de différentes natures

Exemples

1°) Les différentes écritures suivantes désignent le même nombre 2,8 :

$$\frac{7\times 4}{10}\ ;\ 1{,}3+1{,}5\ ;\ 1+\frac{9}{5}\ ;\ 3-0{,}2\ ;\ \frac{28}{10}\ ;\ \sqrt{2{,}56}+\sqrt{1{,}44}\ ;\ 0{,}7\times 4\ ;\cdots$$

2°) Mais, certains nombres ne sont pas de même nature :

- 5 est un nombre entier naturel, mais aussi un nombre relatif positif : 5 = + 5.

Alors que – 5 est un nombre entier relatif.

- 2,8 n'est pas un nombre entier, c'est un nombre décimal positif.
- $\frac{8}{5}$ est un nombre fractionnaire (quotient de deux entiers), mais c'est aussi un

nombre décimal puisque $\frac{8}{5}$ = 1,6 (Ici, la division s'arrête).

- $\frac{4}{7}$ est un nombre fractionnaire (*quotient de deux nombres entiers*), mais ce n'est

pas un nombre décimal puisque $\frac{4}{7}$ = quotient exact de la division de 4 par 7.

Mais la division ne s'arrête pas :

$$\begin{array}{r|l} 4 & 7 \\ \hline & 0{,}571428\,571428\,571\ldots \end{array}$$

Remarque

Dans une division, on sait que le reste doit être plus petit que le diviseur. Donc, dans toutes les divisions d'un entier par un autre entier non nul ; on obtient soit un *nombre décimal* lorsque la division s'arrête (un reste =0), soit un nombre ayant *une écriture décimale illimitée périodique*, on dit aussi *un développement décimal périodique* (les restes sont différents de 0).

> **Propriété 1**.
> Lorsqu'on effectue la division d'un nombre entier par un nombre entier différent de zéro, obtient *un nombre décimal lorsque la division s'arrête* (un reste égal à 0), ou bien *un nombre ayant un développement périodique* (restes différents de 0).

Définition 1.

Un nombre qui s'écrit sous la forme d'une fraction de deux nombres entiers relatifs s'appelle un ***nombre rationnel***.

Exemples.

1°) Tout nombre entier naturel ou relatif est un nombre rationnel. Par exemple : $5=\dfrac{5}{1}$.

2°) Tout nombre décimal est un nombre rationnel. Par exemple : $5{,}27=\dfrac{527}{100}=\dfrac{527}{10^2}$.

Définition 2.

Tout nombre qui ne s'écrit pas sous la forme d'une fraction de deux nombres entiers relatifs est dit ***irrationnel*** ou *non rationnel*.

Exemple $\sqrt{2}$, π et $\pi+1$ sont des nombres irrationnels.

Inversement

Propriété n°2.

Tout nombre ayant un développement décimal périodique, peut s'écrire sous la forme d'une fraction d'un nombre entier relatif par un nombre entier différent de zéro.

Exemple

Écrire le nombre a = 4,373 737… *sous la forme d'une fraction de deux entiers.*

On remarque que le nombre a admet un nombre ayant un développement périodique. Sa période est formée de deux chiffres. On multiplie ce nombre par 10^2 pour « sortir » une période et retrouver la même partie décimale :

$$100\times a = 437{,}373737\ldots \quad (1)$$
$$a = 4{,}373737\ldots \quad (2)$$

On soustrait membre à membre (1) – (2) et on obtient :

$$99\,a = 433$$

Ce qui donne : $a=\dfrac{433}{99}$.

Conclusion. Le nombre *a* est bien un nombre rationnel.

Vérification.

Si on effectue la division à la calculatrice de 433 par 99, on obtient bien

$$a=\frac{433}{99}=4{,}37\ 37\ 37\ 37\ldots$$

1.2) Différents ensembles de nombres

Définition n°1.
Le premier entier naturel est 0 et tout entier naturel n possède un successeur $n+1$.
L'ensemble des entiers naturels se note $\mathbb{N}$ et s'écrit :

$$\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ;\ldots\}$$

- « *N* » pour « *naturel* » et les accolades désignent « *l'ensemble* ». On écrit alors : $3 \in \mathbb{N}$, lire « 3 appartient à $\mathbb{N}$ »
  $-5 \notin \mathbb{N}$ lire « –5 n'appartient pas à $\mathbb{N}$ ».
- On note également $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels privé de zéro : $0 \notin \mathbb{N}^*$.
  - $\mathbb{N}^*$ s'écrit également d'une autre manière :

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Le « \ » se lit « *privé de* ». De même, on a : $\mathbb{N} \setminus \{0 ; 1\} = \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; \ldots\}$

Définition n°2.
Les nombres entiers relatifs sont les nombres entiers positifs ou négatifs.
L'ensemble des entiers relatifs se note $\mathbb{Z}$ et on écrit :

$$\mathbb{Z} = \{\ldots ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \ldots\}.$$

- « *Z* » est l'initiale de « *Zahl* » qui signifie « *nombre* » en allemand.
- En particulier, tous les entiers naturels sont des entiers relatifs positifs. On écrit : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, lire « $\mathbb{N}$ est ***inclus*** dans $\mathbb{Z}$ » ou « $\mathbb{N}$ est ***contenu*** dans $\mathbb{Z}$ ».

Définition n°3.
Les nombres décimaux relatifs s'écrivent de deux manières réduites : sous la forme d'une « ***fraction décimale*** » $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ avec une écriture décimal limitée (avec un nombre fini de chiffres après la virgule).
L'ensemble des décimaux relatifs se note $\mathbb{D}$.

Exemple. $5{,}27 = \frac{527}{100} = \frac{527}{10^2} \in \mathbb{D}$. Mais $\frac{4}{7} = 0571428571428571\ldots \notin \mathbb{D}$.

En particulier, tous les entiers naturels et les entiers relatifs sont des nombres décimaux ayant une partie décimale nulle. On écrit :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$$

(lire « $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$, qui est ***inclus*** dans $\mathbb{D}$ » ou « $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont ***contenus*** dans $\mathbb{D}$ ».

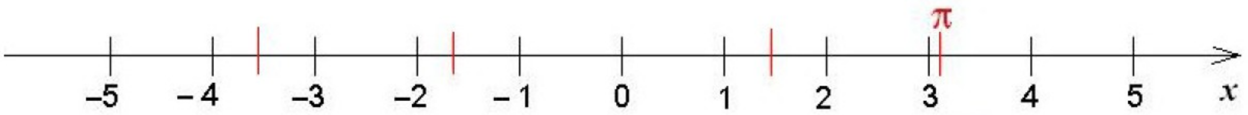
Définition n°4.
Les nombres rationnels s'écrivent de deux manières réduites : sous la forme d'une « fraction de deux entiers relatifs » $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ (b étant non nul) ou avec un nombre ayant un développement décimal périodique. L'ensemble des nombres rationnels se note $\mathbb{Q}$. « Q » pour désigner le « *quotient* » de deux entiers).

Exemple. $\frac{4}{7} = 0{,}571428571428571\ldots \in \mathbb{Q}$. Mais $\pi = 3{,}1415926535897\ldots \notin \mathbb{Q}$.

En particulier, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

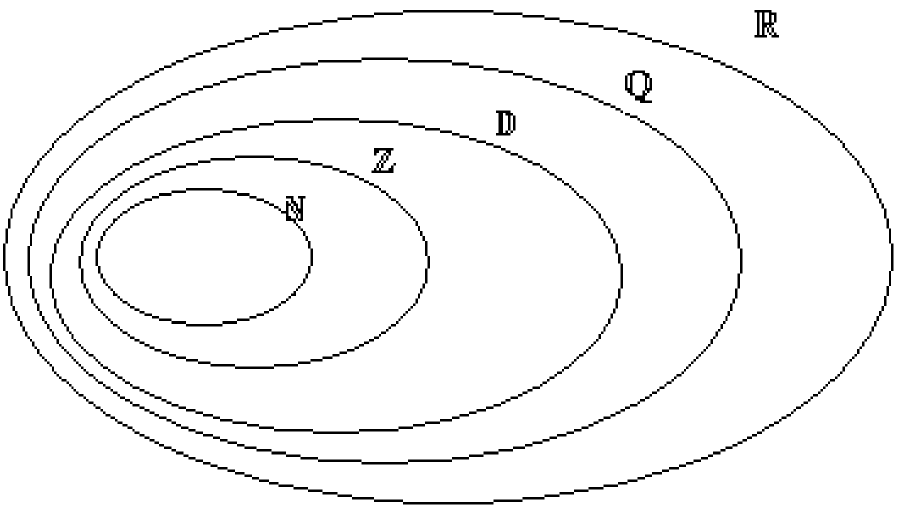
Définition n°5.
L'ensemble des nombres réels est formé de tous les nombres utilisés en classe de Seconde. Il contient les nombres rationnels (donc $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$) et les nombres irrationnels tels que $\sqrt{2}$; π ; $\pi + 1$; $2\pi + 5$;…

L'ensemble $\mathbb{R}$ est généralement représenté par « la » droite graduée :



Propriété.
1°) Tout point de la droite graduée a pour abscisse un nombre réel.
2°) **Réciproquement** : Tout nombre réel est l'abscisse d'un point de la droite graduée.

Schéma récapitulatif : Tous ces ensembles sont « emboîtés » ; c'est-à-dire que les un sont « contenus » ou « inclus » dans les autres.



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

2. Intervalles de R

2.1) Comparaison de deux nombres réels

Nous savons comparer deux nombres réels de différentes manières. Partie entière, partie décimale ; ordre lexicographique, mais la méthode la plus pratique est la suivante :

<u>Définition.</u>

Pour comparer deux nombres réels, on étudie le signe de leur différence.
Soit a et b deux nombres réels, alors :

$$a < b \text{ si et seulement si } a - b < 0$$

De même, on a : $$a > b \text{ si et seulement si } a - b > 0$$

On dit que $a \leqslant b$ (au sens large) si et seulement si [$a < b$ ou $a = b$].
On définit $a \geqslant b$ d'une manière analogue.

Exemple 1. : Comparer $\sqrt{2}$ et $\dfrac{941664}{665857}$; trouver le plus petit et le plus grand.

A priori, ces deux nombres sont différents ! Pourquoi ? *Pensez à la nature de ces deux nombres.*

<u>Première méthode</u> :

A la calculatrice (Lycée) on trouve une valeur décimale à 11 décimales pour chacun d'eux :

$\sqrt{2}$ =1,414 213 562 37… et $\dfrac{941664}{665857}$ = 1,414 213 562 37… Que se passe-t-il ?

On peut chercher les décimales cachées en calculant la différence entre $\sqrt{2}$ et le nombre avec les décimales sûres. On a : $\sqrt{2} - 1{,}41421356237 = 3{,}1 \times 10^{-12}$. Donc :

$$\sqrt{2} = 1{,}414\ 213\ 562\ 37\mathbf{3}\ 1\ldots$$

De même, on a : $\dfrac{941664}{665857} - 1{,}41421356237 = 1{,}5 \times 10^{-12}$. Donc :

$$\frac{941664}{665857} = 1{,}414\ 213\ 562\ 37\mathbf{1}\ 5\ldots$$

<u>Conclusion 1</u>. $\sqrt{2} > \dfrac{941664}{665857}$ par comparaison des 12èmes décimales. (Trop long !).

<u>2ème méthode</u> :

On peut les « différencier », en utilisant la définition ci-dessus : on calculer la différence à la calculatrice, et on obtient :

$\sqrt{2} - \dfrac{941664}{665857}$ = 1,6 E–12, Ce qui peut se lire $1{,}6 \times 10^{-12}$. Donc $\sqrt{2} - \dfrac{941664}{665857} > 0$.

<u>Conclusion 2</u>. $$\sqrt{2} > \frac{941664}{665857}.$$

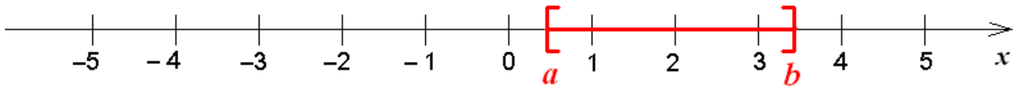
Par conséquent : Le premier chiffre différent dans les développements décimaux de ces deux nombres se trouve à la 12ème position après la virgule !

2.2) Intervalles de R

a) L'ensemble des nombres réels compris, au sens large, entre deux nombres réels a et b s'appelle ***un intervalle*** et est noté **[*a* ; *b*].**

$$x \in [a\,; b] \text{ si et seulement si } a \leqslant x \leqslant b$$

Cet intervalle est représenté graphiquement sur la droite graduée comme suit :

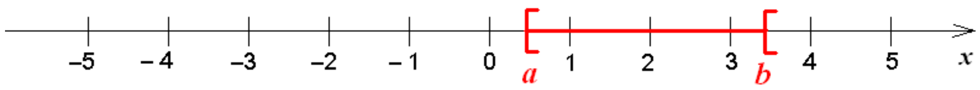


Remarquons ici que les **deux bornes sont comprises**. Le crochet est « ***tourné vers*** » les valeurs de l'intervalle des deux côtés.

b) L'ensemble des nombres réels compris entre deux nombres réels a et b , ***a* compris** et ***b* exclu**, est noté **[*a* ; *b*[**.

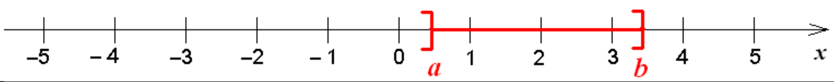
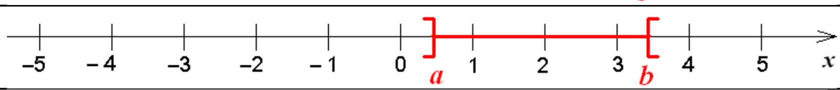
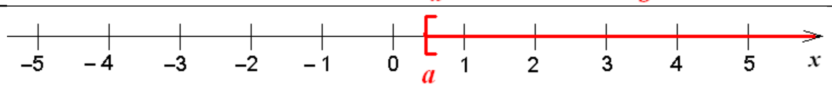
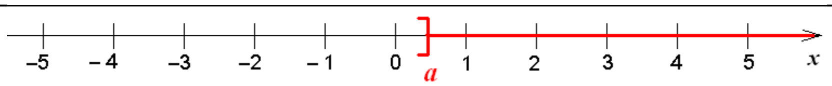
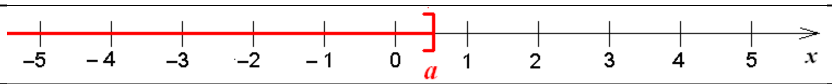
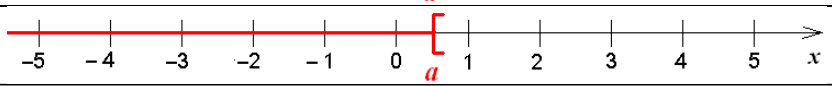
$$x \in [a\,; b[\text{ si et seulement si } a \leqslant x < b$$

Cet intervalle est représenté graphiquement sur la droite graduée comme suit :



Remarquons ici que la borne ***a est comprise*** ; donc le crochet est « **tourné vers** » les valeurs de l'intervalle du côté de a ». La borne ***b est exclue*** ; le crochet «**tourne le dos** » aux valeurs de l'intervalle du côté de b.

c) Autres intervalles :

$]a\,; b]$	$a < x \leqslant b$	
$]a\,; b[$	$a < x < b$	
$[a\,; +\infty[$	$x \geqslant a$	
$]a\,; +\infty[$	$x > a$	
$]-\infty; a]$	$x \leqslant a$	
$]-\infty\,; a[$	$x < a$	
$]-\infty\,;+\infty[$	$x \in \mathbb{R}$	Toute la droite réelle

$+\infty$ se lit « ***plus l'infini*** ». Dire que $x \in [a\,; +\infty[$ signifie que $x \geqslant a$; donc toutes les valeurs (supérieures à a) sont comprises jusqu'à l'infini (positif).

On définit **$-\infty$**, lire « ***moins l'infini*** » d'une manière analogue.

2.3) Intersection et réunion d'intervalles

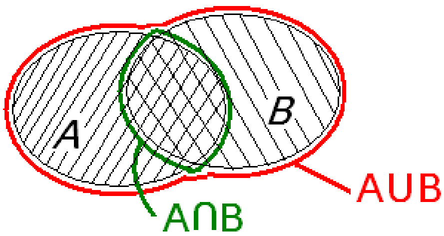
Définition 1. ***L'intersection*** de deux ensembles A et B, se note $A \cap B$ et désigne l'ensemble des éléments qui appartiennent (à la fois) à **A et** à **B**. C'est l'ensemble des ***éléments communs à A et à B***. On lit « ***A inter B*** » et on écrit :

$$[\ x \in A \cap B\ ] \text{ si et seulement si } [\ x \in A \ \textbf{ et } \ x \in B\ ]$$

Définition 2. ***La réunion*** de deux ensembles A et B, se note $A \cup B$ et désigne l'ensemble des éléments qui appartiennent à **A ou** à **B**. On lit « **A union B** » et on écrit :

$$[\ x \in A \cup B\ ] \text{ si et seulement si } [\ x \in A \ \textbf{ ou } \ x \in B\ ]$$

Schéma représentatif



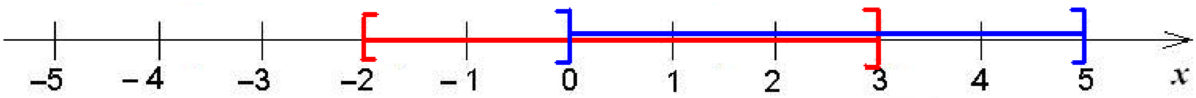
Exemples

1°) Comme **N** est inclus dans **Z**, on peut écrire : $N \cap Z = N$ et $N \cup Z = Z$.

2°) On considère les deux intervalles A = [–2 ;3] et B =]0 ; 5].

Déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.

On fait un schéma représentatif : A en rouge et B en bleu.



L'***intersection*** de A et B correspond à la ***partie commune*** à ces deux intervalles, coloriée en rouge **et** en bleu. Par conséquent, il est clair que :

$$A \cap B =]\,0\,;3\,]$$

Bien sûr, on doit faire attention aux bornes de l'intervalle, *incluses* ou *exclues*.

Par contre, la ***réunion*** de A et B correspond à toute la ***partie coloriée*** en rouge **ou** en bleu. Par conséquent, il est clair que :

$$A \cup B = [\,-2\,;5\,]$$

Remarques

Dans le langage courant, le « **ou** » signifie un *choix obligatoire* ; comme au restaurant, dans « ***Fromage ou dessert*** ». On dit que le ***« ou » est exclusif***.

En mathématiques, dans la définition de la réunion de deux ensembles, le « **ou** » n'est pas exclusif.

Dire que $x \in A \cup B$ signifie que *x* appartient à ***« au moins un des deux ensembles »***.

Donc « *x* appartient à A » **ou** « *x* appartient à B » **ou** « *x* appartient aux deux ».

On dit que le ***« ou » est inclusif***.