Fonctions polynôme et homographique

www.mathmaurer.com – *Cours – 2nde*

I – Fonction polynôme de degré 2

1 - Forme canonique

Définition 1: On appelle **fonction polynôme de degré 2** une fonction de la forme :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$

Propriété 1: Pour toute fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$, il existe deux réels uniques α et β tels que : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ (forme canonique)

Application: Mettre sous la forme canonique

Méthode : on utilise les identités remarquables $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ ou $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$.

- $f(x) = x^2 - 4x + 5 = x^2 - 2\times x\times 2 + 2^2 - 2^2 + 5 = (x^2 - 2\times x\times 2 + 2^2) - 4 + 5 = (x-2)^2 + 1$
- $g(x) = 2x^2 - 12x + 1 = 2(x^2 - 6x) + 1 = 2(x^2 - 2\times x\times 3 + 3^2 - 3^2) + 1 = 2\left[(x^2 - 2\times x\times 3 + 9) - 9\right] + 1$
  $= 2\left[(x-3)^2 - 9\right] + 1 = 2(x-3)^2 - 18 + 1 = 2(x-3)^2 - 17$
- $h(x) = 3x^2 + 6x + 4 = 3(x^2 + 2x) + 4 = 3(x^2 + 2\times x\times 1 + 1^2 - 1^2) + 4$
  $= 3\left[(x^2 + 2\times x\times 1 + 1^2) - 1\right] + 4 = 3\left[(x+1)^2 - 1\right] + 4 = 3(x+1)^2 - 3 + 4 = 3\left(x-(-1)\right)^2 + 1$

2 - Sens de variation

Étude de la fonction f telle que : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

$a > 0$

Étude sur $]-\infty ; \alpha]$

$x_1 \leq x_2 \leq \alpha$

$x_1 - \alpha \leq x_2 - \alpha \leq 0$

La fonction carré est décroissante sur $]-\infty ; 0]$

$(x_2 - \alpha)^2 \leq (x_1 - \alpha)^2 \leq 0$

Multiplication par $a > 0$

$a(x_2 - \alpha)^2 \leq a(x_1 - \alpha)^2 \leq 0$

$a(x_2 - \alpha)^2 + \beta \leq a(x_1 - \alpha)^2 + \beta \leq \beta$

$f(x_2) \leq f(x_1)$

donc f est décroissante sur $]-\infty ; \alpha]$.

Étude sur $[\alpha ; +\infty[$

$\alpha \leq x_1 \leq x_2$

$0 \leq x_1 - \alpha \leq x_2 - \alpha$

La fonction carré est croissante sur $[0 ; +\infty[$

$0 \leq (x_1 - \alpha)^2 \leq (x_2 - \alpha)^2$

Multiplication par $a > 0$

$0 \leq a(x_1 - \alpha)^2 \leq a(x_2 - \alpha)^2$

$\beta \leq a(x_1 - \alpha)^2 + \beta \leq a(x_2 - \alpha)^2 + \beta$

$f(x_1) \leq f(x_2)$

donc f est croissante sur $[\alpha ; +\infty[$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a(x-\alpha)^2 \geq 0$ donc $a(x-\alpha)^2 + \beta \geq \beta$ et $f(\alpha) = \beta$

donc f admet pour minimum β atteint en $x = \alpha$.

$a < 0$ On utilise la même méthode mais cette fois, on multiplie les membres d'une inégalité par un nombre négatif donc on change le sens des inégalités.

Donc, dans ce cas, f est croissante sur $]-\infty ; \alpha]$ et décroissante sur $[\alpha ; +\infty[$.

f admet pour maximum β atteint en $x = \alpha$.

Propriété 2: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $a \neq 0$.

$a > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	β	$\nearrow$	

$a < 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	β	$\searrow$	

3 - Représentation graphique

Propriété 3: La représentation graphique d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $a \neq 0$ est une **parabole** de **sommet** $S(\alpha\ ,\ \beta)$. La droite parallèle à (O, y) passant par S d'équation $x = \alpha$ est un **axe de symétrie** de la parabole.

Application: Variations et représentation graphique d'une fonction polynôme

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $h(x) = 3x^2 + 6x + 4 = 3\left(x-(-1)\right)^2 + 1$.

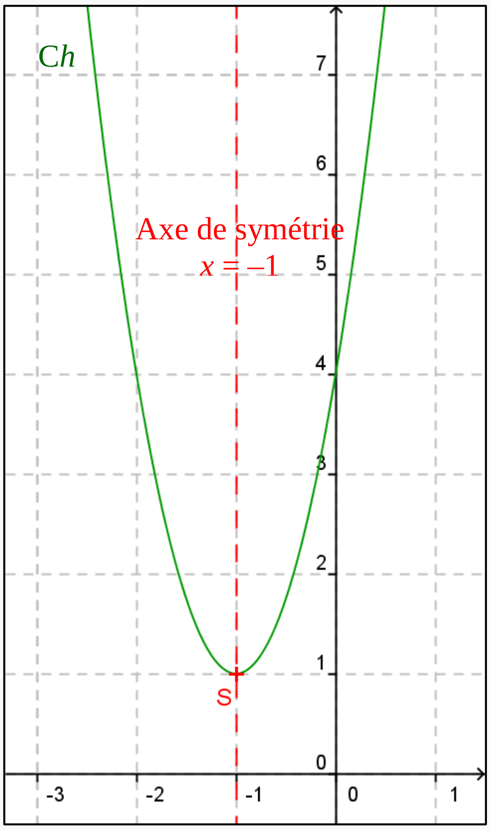
D'après la propriété 2, le tableau de variation de h est :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$h(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

À l'aide d'un tableau de valeurs, on obtient la parabole ci-contre.

S(–1 ; 1) est le sommet de la parabole.

L'axe de symétrie de la parabole est la droite d'équation $x = -1$



II – Fonction homographique

1 - Définition

Définition 2: On appelle **fonction homographique** une fonction de la forme :

$$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{avec} \quad c \neq 0 \quad \text{et} \quad a \times d \neq b \times c$$

Remarque : Si $c = 0$ alors $x \mapsto \dfrac{ax+b}{d}$ est une fonction affine.

Si $a \times d = b \times c$ alors $ax + b$ et $cx + d$ sont proportionnels.

Domaine de définition

$\dfrac{ax+b}{cx+d}$ existe si $cx + d \neq 0$ (division par 0 interdite) soit $x \neq \dfrac{-d}{c}$.

Propriété 4: La fonction $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ est définie sur $\left]-\infty; \dfrac{-d}{c}\right[\cup \left]\dfrac{-d}{c}; +\infty\right[$.

2 - Représentation graphique

Application: Représentation graphique d'une fonction homographique

Soit f la fonction telle que $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

Donc f est définie si $x - 1 \neq 0$ soit $x \neq 1$ donc $Df =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.

À l'aide d'un tableau de valeurs, on obtient l'**hyperbole** ci-contre.

La courbe se rapproche de la droite d'équation $x = 1$ sans jamais la couper.