Asie 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

1) *Propriétés des catadioptres.*

On considère un rayon lumineux modélisé par une droite d_1 de vecteur directeur $\overrightarrow{v_1}(a, b, c)$. Le rayon se réfléchit sur le plan (OAB) en une droite d_2 de vecteur directeur $\overrightarrow{v_2}(a, b, -c)$. Ce nouveau rayon se réfléchit sur le plan (OBC) en une droite d_3 de vecteur directeur $\overrightarrow{v_3}(-a, b, -c)$. Ce dernier rayon se réfléchit sur le plan (OAC) en une droite d_4 de vecteur directeur $\overrightarrow{v_4}(-a, -b, -c)$.

$\overrightarrow{v_4} = -\overrightarrow{v_1}$ et donc d_4 est parallèle à d_1. On a montré que si un rayon se réfléchit successivement sur les plans (OAB), (OBC) puis (OAC), le rayon final est parallèle au rayon initial.

2) *Réflexion de d_2 sur le plan (OBC).*

a) La droite d_2 est la droite passant par $I_1(2, 3, 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v_2}(-2, -1, 1)$. Une représentation paramétrique de d_2 est

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2 - 2t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

b) Un vecteur normal au plan (OBC) est le vecteur $\overrightarrow{OA}$ de coordonnées $(1, 0, 0)$. Une équation cartésienne du plan (OBC) est $x = 0$.

c) $\left\{\begin{array}{l} x_{I_2} = 0 = 2 - 2 \times 1 \\ y_{I_2} = 2 = 3 - 1 \\ z_{I_2} = 1 \end{array}\right.$. Donc, le point I_2 appartient à la droite d_2. D'autre part, $x_{I_2} = 0$ et donc le point I_2 appartient au plan (OBC). Enfin, le vecteur $\overrightarrow{v_2}$ n'est pas orthogonal au vecteur normal $\overrightarrow{OA}$ car $x_{\overrightarrow{v_2}} \neq 0$ et donc la droite d_2 n'est pas parallèle au plan (OBC). Finalement, la droite d_2 et le plan (OBC) sont sécants en I_2.

3) *Réflexion de d_3 sur le plan (OAC).*

d_3 est la droite passant par $I_2(0, 2, 1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v_3}(2, -1, 1)$. Une représentation paramétrique de la droite d_3 est $\left\{\begin{array}{l} x = 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}$. Une équation cartésienne du plan (OAC) est $y = 0$.
Soit $M(2t, 2 - t, 1 + t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de d_3. $M \in (OAC) \Leftrightarrow 2 - t = 0 \Leftrightarrow t = 2$. Quand $t = 2$, on obtient le point de coordonnées $(4, 0, 3)$. Les coordonnées du point I_3 sont donc $(4, 0, 3)$.

Finalement, d_4 est la droite passant par $I_3(4, 0, 3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v_4}(2, 1, 1)$.

4) *Étude du trajet de la lumière.*

a) d_1 est dirigée par $\overrightarrow{v_1}(-2, -1, -1)$ et d_2 est dirigée par $\overrightarrow{v_2}(-2, -1, 1)$. $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}$.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v_1} = 1 \times (-2) + (-2) \times (-1) + 0 \times (-1) = -2 + 2 = 0$$

et

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v_2} = 1 \times (-2) + (-2) \times (-1) + 0 \times 1 = -2 + 2 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}$ et donc le vecteur $\overrightarrow{u}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

b) Les droites d_1 et d_2 définissent un unique plan à savoir le plan $\mathscr{P}$. Si les droites d_1, d_2 et d_3 sont contenues dans un même plan, alors la droite d_3 est contenue dans le plan $\mathscr{P}$.

La droite d_3 est dirigée par $\overrightarrow{v_3}(2, -1, 1)$.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v_3} = 1 \times 2 + (-2) \times (-1) + 0 \times 1 = 2 + 2 = 4 \neq 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{v_3}$ n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et donc la droite d_3 n'est pas parallèle au $\mathscr{P}$. En particulier, la droite d_3 n'est pas contenue dans $\mathscr{P}$ et donc les droites d_1, d_2 et d_3 ne sont pas situées dans un même plan.

c) La droite d_4 est parallèle à la droite d_1 et donc au plan $\mathscr{P}$. Par suite, la droite d_4 est contenue dans le plan $\mathscr{P}$ si et seulement si le point $I_3(4, 0, 3)$ appartient au plan $\mathscr{P}$. Le plan $\mathscr{P}$ est le plan passant par $I_1(2, 3, 0)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{u}(1, -2, 0)$. Une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est $(x - 2) - 2(y - 3) = 0$ ou encore $x - 2y + 4 = 0$.

$$x_{I_4} - 2y_{I_4} + 4 = 4 - 0 + 4 = 8 \neq 0.$$

Le point I_4 n'appartient pas au plan $\mathscr{P}$ et donc les droites d_1, d_2 et d_4 ne sont pas situées dans un même plan.

