

Centres étrangers 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) Si $t = 0$, on obtient $x = 2 = x_A$, $y = 3 = y_A$ et $z = 0 = z_A$ dans la représentation paramétrique de d_1 . Donc, le point A appartient à la droite d_1 .

2) Un vecteur directeur de d_1 est $\vec{u}_1(1, -1, 1)$ et un vecteur directeur de d_2 est $\vec{u}_2(2, 1, 0)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

3)

$$\vec{v} \cdot \vec{u}_1 = 1 \times 1 + (-2) \times (-1) + (-3) \times 1 = 1 + 2 - 3 = 0$$

et

$$\vec{v} \cdot \vec{u}_2 = 1 \times 2 + (-2) \times 1 + (-3) \times 0 = 2 - 2 = 0.$$

Donc, le vecteur \vec{v} est orthogonal aux vecteurs \vec{u}_1 et \vec{u}_2 .

4) a) Soit P' le plan d'équation $5x + 4y - z - 22 = 0$. $5x_A + 4y_A - z_A - 22 = 5 \times 2 + 4 \times 3 - 0 - 22 = 0$ et donc le point A appartient au plan P' .

Un vecteur normal au plan P' est le vecteur $\vec{n}(5, 4, -1)$.

$$\vec{n} \cdot \vec{u}_1 = 5 \times 1 + 4 \times (-1) + (-1) \times 1 = 5 - 4 - 1 = 0$$

et

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 5 \times 1 + 4 \times (-2) + (-1) \times (-3) = 5 - 8 + 3 = 0.$$

Le vecteur \vec{n} est orthogonal aux vecteurs \vec{u}_1 et \vec{v} . En résumé, le plan P' est le plan passant par A et dirigé par les vecteurs \vec{u}_1 et \vec{v} ou encore $P' = P$. Ainsi, P est le plan d'équation $5x + 4y - z - 22 = 0$.

b) Soit $M'(-5 + 2t', -1 + t', 5)$, $t' \in \mathbb{R}$, un point de la droite d_2 .

$$M' \in P \Leftrightarrow 5(-5 + 2t') + 4(-1 + t') - 5 - 22 = 0 \Leftrightarrow 14t' - 56 = 0 \Leftrightarrow t' = 4.$$

$t' = 4$ fournit le point de coordonnées $(3, 3, 5)$ qui est effectivement le point B . La droite d_2 coupe le plan P au point $B(3, 3, 5)$.

5) a) Δ est la droite de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 3 + u \\ y = 3 - 2u \\ z = 5 - 3u \end{cases}, u \in \mathbb{R}.$$

b) Soient $M(2 + t, 3 - t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de d_1 et $N(3 + u, 3 - 2u, 5 - 3u)$, $u \in \mathbb{R}$, un point de Δ .

$$\begin{aligned} M = N &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 + t = 3 + u \\ 3 - t = 3 - 2u \\ t = 5 - 3u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = u + 1 \\ 3 - (u + 1) = 3 - 2u \\ u + 1 = 5 - 3u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = u + 1 \\ u = 1 \\ u = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ u = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Les droites d_1 et Δ sont donc sécantes en le point de coordonnées $(4, 1, 2)$.

c) \vec{v} est orthogonal aux vecteurs \vec{u}_1 et \vec{u}_2 ou encore la droite Δ est orthogonale aux droites d_1 et d_2 . D'après la question précédente, les droites Δ et d_1 sont sécantes et d'autre part, les droites Δ et d_2 sont sécantes en B . Finalement, la droite Δ est perpendiculaire aux droites d_1 et d_2 ou encore la droite Δ répond au problème posé.