EXTRAITS D'ANNALES GEOMETRIE A TRAVAILLER

EXERCICE N° 1 (*EXERCICE DIT CLASSIQUE*)

EXERCICE 2 (4 points) (commun à tous les candidats)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
On considère deux droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques :

$$d_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x = -5 + 2t' \\ y = -1 + t' \\ z = 5 \end{cases}, \ t' \in \mathbb{R}.$$

On admet que les droites d_1 et d_2 sont non coplanaires.
Le but de cet exercice est de déterminer, si elle existe, une troisième droite Δ qui soit à la fois sécante avec les deux droites d_1 et d_2 et orthogonale à ces deux droites.

1) Vérifier que le point $A(2\ ;\ 3\ ;\ 0)$ appartient à la droite d_1.

2) Donner un vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ de la droite d_1 et un vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$ de la droite d_2.
Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ?

3) Vérifier que le vecteur $\vec{v}(1\ ;\ -2\ ;\ -3)$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.

4) Soit P le plan passant par le point A, et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\vec{v}$.
On étudie dans cette question l'intersection de la droite d_2 et du plan P.

a) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est : $5x + 4y - z - 22 = 0$.

b) Montrer que la droite d_2 coupe le plan P au point $B(3\ ;\ 3\ ;\ 5)$.

5) On considère maintenant la droite Δ dirigée par le vecteur $\vec{v}(1\ ;\ -2\ ;\ -3)$, et passant par le point $B(3\ ;\ 3\ ;\ 5)$.

a) Donner une représentation paramétrique de cette droite Δ.

b) Les droites d_1 et Δ sont-elles sécantes ? Justifier la réponse.

c) Expliquer pourquoi la droite Δ répond au problème posé.

EXERCICE N°2 (*EXERCICE DIT DEROUTANT*)

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Un catadioptre est un dispositif optique formé de trois miroirs en forme de « coin de cube », les faces réfléchissantes tournées vers l'intérieur. On en trouve dans les réflecteurs de certains véhicules ainsi que dans les appareils de topographie.

Les points O, A, B et C sont des sommets d'un cube, de telle sorte que le repère $\left(O\,;\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$ soit un repère orthonormé.

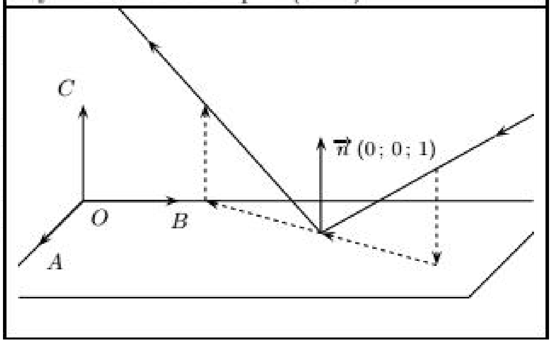
On utilisera ce repère dans tout l'exercice.

Les trois miroirs du catadioptre sont représentés par les plans (OAB), (OBC) et (OAC). Les rayons lumineux sont modélisés par des droites.

Règles de réflexion d'un rayon lumineux (admises) :

- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}\,(a\ ;\ b\ ;\ c)$ est réfléchi par le plan (OAB), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\vec{v}\,(a\ ;\ b\ ;\ -c)$;
- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}\,(a\ ;\ b\ ;\ c)$ est réfléchi par le plan (OBC), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\vec{v}\,(-a\ ;\ b\ ;\ c)$;
- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}\,(a\ ;\ b\ ;\ c)$ est réfléchi par le plan (OAC), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\vec{v}\,(a\ ;\ -b\ ;\ c)$;

Vue en perspective cavalière de la réflexion d'un rayon lumineux sur le plan (OAB)



1) *Propriété des catadioptres*

En utilisant les règles précédentes, démontrer que si un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}\,(a\ ;\ b\ ;\ c)$ est réfléchi successivement par les plans (OAB), (OBC) et (OAC), le rayon final est parallèle au rayon initial.

Pour la suite, on considère un rayon lumineux modélisé par une droite d_1 de vecteur directeur $\overrightarrow{v_1}\,(-2\ ;\ -1\ ;\ -1)$ qui vient frapper le plan (OAB) au point $I_1\,(2\ ;\ 3\ ;\ 0)$. Le rayon réfléchi est modélisé par la droite d_2 de vecteur directeur $\overrightarrow{v_2}\,(-2\ ;\ -1\ ;\ 1)$ et passant par le point I_1.

2) *Réflexion de d_2 sur le plan (OBC)*

a) Donner une représentation paramétrique de la droite d_2.

b) Donner, sans justification, un vecteur normal au plan (OBC) et une équation cartésienne de ce plan.

c) Soit I_2 le point de coordonnées $(0\ ;\ 2\ ;\ 1)$.
Vérifier que le plan (OBC) et la droite d_2 sont sécants en I_2.

On note d_3 la droite qui représente le rayon lumineux après réflexion sur le plan (OBC). d_3 est donc la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{v_3}\,(2\ ;\ -1\ ;\ 1)$ passant par le point $I_2\,(0\ ;\ 2\ ;\ 1)$.

3) *Rélexion de d_3 sur le plan (OAC)*

Calculer les coordonnées du point d'intersection I_3 de la droite d_3 avec le plan (OAC).
On note d_4 la droite qui représente le rayon lumineux après réflexion sur le plan (OAC). Elle est donc parallèle à la droite d_1.

4) *Étude du trajet de la lumière*

On donne le vecteur $\vec{u}\,(1\ ;\ -2\ ;\ 0)$, et on note $\mathscr{P}$ le plan défini par les droites d_1 et d_2.

a) Démontrer que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

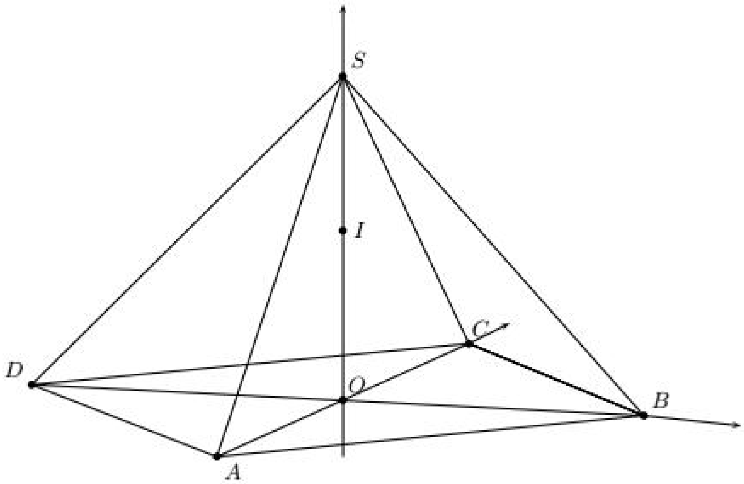
b) Les droites d_1, d_2 et d_3 sont-elles situées dans un même plan ?

c) Les droites d_1, d_2 et d_4 sont-elles situées dans un même plan ?

EXERCICE N° 3 (*AUTRE TYPE D'EXERCICE*)

EXERCICE 4 (5 points) (Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

On considère la pyramide régulière $SABCD$ de sommet S constituée de la base carrée $ABCD$ et de triangles équilatéraux représentée ci-dessous.



Le point O est le centre de la base $ABCD$ avec $OB = 1$.
On rappelle que le segment $[SO]$ est la hauteur de la pyramide et que toutes les arêtes ont la même longueur.

1) Justifier que le repère $\left(O\ ;\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OS}\right)$ est orthonormé.

Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère $\left(O\ ;\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OS}\right)$.

2) On définit le point K par la relation $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$ et on note I le milieu du segment $[SO]$.

a) Déterminer les coordonnées du point K.

b) En déduire que les points B, I et K sont alignés.

c) On note L le point d'intersection de l'arête $[SA]$ avec le plan (BCI).
Justifier que les droites (AD) et (KL) sont parallèles.

d) Déterminer les coordonnées du point L.

3) On considère le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ dans le repère $\left(O\ ;\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OS}\right)$.

a) Montrer que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (BCI).

b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{DS}$ sont coplanaires.

c) Quelle est la position relative des plans (BCI) et (SAD) ?