FONCTIONS USUELLES

Fonction "valeur absolue"
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto |x|$

Fonction "carré"
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$

Fonction "cube"
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^3$

Fonction "racine carrée"
$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$

Fonction "inverse"
$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$

$\mathbb{R}_+$ représente l'ensemble $[0 ; +\infty[$
$\mathbb{R}^*$ représente l'ensemble $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

Pour l'étude de chacune de ces fonctions, on suivra la ***démarche scientifique*** suivante :

1) PARITÉ :

* La fonction f est-elle définie sur un domaine symétrique par rapport à 0 ?
* Si oui, que vaut $f(-x)$?
* Quelle symétrie aura la représentation graphique de f ?

2) REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

* Faire un tableau de valeurs.
* Choisir une échelle adaptée.
* Tracer la courbe (lissage).

3) QUE PEUT-ON CONJECTURER À PARTIR DE LA REPRÉSENTATION GRAPHIQUE ?

* Y a-t-il un maximum, un minimum ?
* Sur quels intervalles la fonction est-elle croissante, décroissante ?

4) DÉMONSTRATIONS (DES CONJECTURES)

* Exemple 1 : pour démontrer que f atteint un maximum M en x_M, on montre les deux choses suivantes :
  - $f \leqslant M$ pour tout x (pour toute valeur x de l'ensemble de définition de f)
  - $f(x_M) = M$
* Exemple 2 : pour démontrer que f est **strictement décroissante** sur un intervalle $I = [a ; b]$, il faut montrer que pour tous réels x_1 et x_2 de I tels que $x_1 < x_2$, on a : $f(x_1) > f(x_2)$. (f **inverse** l'ordre)

5) RÉSUMÉ

* Faire le tableau des variations de f.

ÉTUDE DE LA FONCTION "VALEUR ABSOLUE" : $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto |x| \end{array}$

PARITÉ

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

CONJECTURES

DÉMONSTRATIONS

- *Démontrons que le minimum de f est m = 0 :*

- *Démontrons que f est strictement croissante sur l'intervalle [0 ; +∞[:*

  Soient x_1 et x_2 deux réels de l'intervalle tels que $x_1 < x_2$ (*)

  $x_1 \geqslant 0$ donc $|x_1| =$

  $x_2 > 0$ donc $|x_2| =$

  L'inégalité (*) peut donc s'écrire :

  Ce qui s'écrit encore $f(x_1) < f(x_2)$.

  Conclusion :

- *Démontrons que f est strictement décroissante sur l'intervalle]–∞ ; 0]*

  Soient x_1 et x_2 deux réels de l'intervalle tels que $x_1 < x_2$:

  En multipliant les deux membres de l'inégalité par –1, on obtient :

  Or $-x_1$ et $-x_2$ sont des réels de l'intervalle

  Et comme la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle , on a :

  D'autre part, f est une fonction paire, d'où :

  Conclusion :

TABLEAU DE VARIATIONS

ÉTUDE DE LA FONCTION "CARRÉ" : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$

PARITÉ

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

CONJECTURES

DÉMONSTRATIONS

- *Démontrons que le minimum de f est m = 0 :*

- *Démontrons que f est strictement croissante sur l'intervalle*

  Soient x_1 et x_2 deux réels de l'intervalle tels que $x_1 < x_2$ (*)

  En multipliant les deux membres de l'inégalité (*) par $x_1 \geqslant 0$, on obtient :

  En multipliant les deux membres de l'inégalité (*) par $x_2 > 0$, on obtient :

  D'où, par transitivité des inégalités :

  Ce qui s'écrit encore $f(x_1) < f(x_2)$.

  Conclusion :

- *Démontrons que f est strictement décroissante sur l'intervalle*

  Soient x_1 et x_2 deux réels de l'intervalle tels que $x_1 < x_2$:

  En multipliant les deux membres de l'inégalité par –1, on obtient :

  Or $-x_1$ et $-x_2$ sont des réels de l'intervalle

  Et comme la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle , on a :

  D'autre part, f est une fonction paire, d'où :

  Conclusion :

TABLEAU DE VARIATIONS

ÉTUDE DE LA FONCTION "CUBE" : $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{array}$

PARITÉ

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

CONJECTURES

DÉMONSTRATIONS

- *Démontrons que f est strictement croissante sur l'intervalle [0 ; +∞[*

  Soient x_1 et x_2 deux réels de l'intervalle tels que $x_1 < x_2$ (*)

  En multipliant les deux membres de l'inégalité (*) par $x_1 \geqslant 0$, on obtient :

  En multipliant les deux membres de l'inégalité (*) par $x_2 > 0$, on obtient :

  D'où, par transitivité des inégalités : (**)

  En multipliant les deux membres de l'inégalité (**) par $x_1 \geqslant 0$, on obtient :

  Et comme $x_1 < x_2$, on a finalement :

  Ce qui s'écrit encore $f(x_1) < f(x_2)$.

  Conclusion :

- *Démontrons que f est strictement croissante sur l'intervalle]–∞ ; 0]*

  Soient x_1 et x_2 deux réels de l'intervalle tels que $x_1 < x_2$:

  En multipliant les deux membres de l'inégalité par –1, on obtient :

  Or $-x_1$ et $-x_2$ sont des réels de l'intervalle

  Et comme la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle , on a :

  D'autre part, f est une fonction impaire, d'où :

  Conclusion :

TABLEAU DE VARIATIONS

ÉTUDE DE LA FONCTION "INVERSE" : $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

PARITÉ

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

CONJECTURES

DÉMONSTRATIONS

- *Démontrons que f est strictement décroissante sur l'intervalle]0 ; +∞[.*

  Soient x_1 et x_2 deux réels de l'intervalle tels que $x_1 < x_2$.

  En divisant les deux membres de l'inégalité par $x_1x_2 > 0$, on obtient :

  D'où, en simplifiant :

  Ce qui s'écrit encore $f(x_1) > f(x_2)$.

  Conclusion :

- *Démontrons que f est strictement décroissante sur l'intervalle*

  Soient x_1 et x_2 deux réels de l'intervalle tels que $x_1 < x_2$.

  En multipliant les deux membres de l'inégalité par –1, on obtient :

  Or $-x_1$ et $-x_2$ sont des réels de l'intervalle

  Et comme la fonction est strictement décroissante sur l'intervalle , on a :

  D'autre part, la fonction f est impaire, donc :

  Ce qui s'écrit encore $f(x_1) > f(x_2)$

  Conclusion :

TABLEAU DE VARIATIONS

ÉTUDE DE LA FONCTION "RACINE CARRÉE" : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto\sqrt{x}\end{array}$

PARITÉ

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

CONJECTURES

DÉMONSTRATIONS

- *Démontrons que le minimum de f est m = 0 :*

- *Démontrons que f est strictement croissante sur l'intervalle [0 ; +∞[.*

  Soient x_1 et x_2 deux réels de l'intervalle tels que $x_1 < x_2$.

  Remarquons que $x_2 - x_1 = (\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1})$.

  Donc $\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} = \dfrac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}}$

  Le numérateur de cette fraction est de signe car

  Le dénominateur de cette fraction est de signe car

  Donc $\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} > 0$ *c'est à dire*

  Ce qui s'écrit encore $f(x_1) < f(x_2)$.

  Conclusion :

TABLEAU DE VARIATIONS