*L'expression « **canonique** » d'une fonction « du second degré »*

$a \neq 0$

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c \longrightarrow f(x) = a\,(\,x - \alpha\,)^2 + \beta \quad \textit{avec} \quad \alpha = \frac{-b}{2a} \quad \textit{et} \quad \beta = f(\alpha)$$

La représentation graphique C_f est une parabole dont le sommet $\boldsymbol{S}$ est le point de coordonnées $(\,\alpha\,,\beta\,)$

Si $a > 0$: la parabole C_f est « tournée vers le haut » donc le sommet $\boldsymbol{S}$ est **un MAXIMUM**

Si $a < 0$: la parabole C_f est « tournée vers le bas » donc le sommet $\boldsymbol{S}$ est **un MINIMUM**

<u>RECHERCHE de la forme canonique à partir d' un exemple</u>

Soit f *la fonction définie par* $f(x) = -2x^2 + 16x - 30$

On a $a = -2$ et $b = 16$ et $c = -30$

Comme $a < 0$: la parabole C_f est « **tournée vers le bas** » donc la fonction f est croissante sur $]-\infty\,,\,\alpha\,]$ et est décroissante sur $[\,\alpha\,,\,+\infty\,[$ et le sommet S de C_f est un « **maximum** »

L'abscisse du sommet S de la parabole C_f se trouve en $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{16}{2(-2)} = 4$

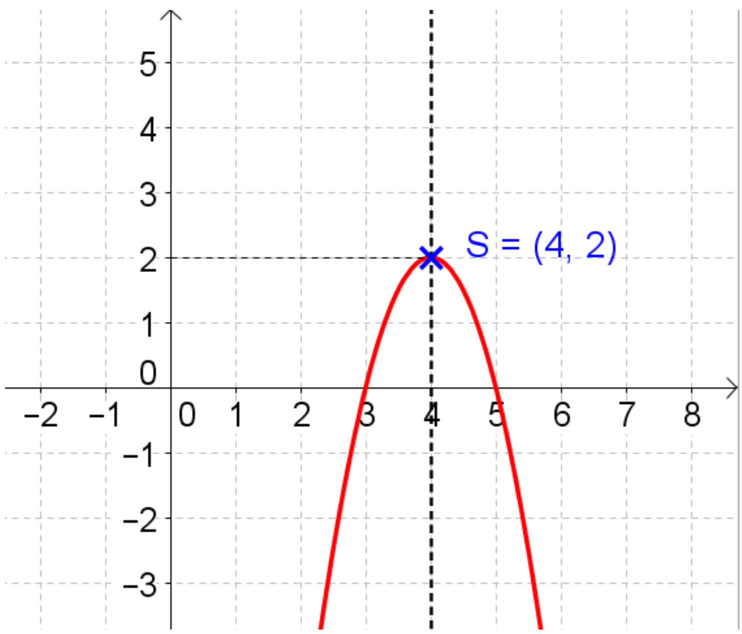
L'ordonnée du sommet S de la parabole C_f se trouve en $\beta = f(\alpha) = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = f(4)$

Calcul de β : $\beta = f(4) = -2 \times 4^2 + 16 \times 4 - 30 = -32 + 64 - 30 = 2$

Le forme canonique est : $f(x) = -2\,(\,x - 4\,)^2 + 2$

ET on peut tracer le tableau de variation et la courbe C_f par exemple sur l'intervalle $[\,-10\,,\,+10\,]$

x	-10		4		10
f(x)	-390	↗	2	↘	-70



PROPRIETES A COMPRENDRE

La représentation graphique de la fonction c'est-à-dire la courbe C_f ***est une PARABOLE***

- de sommet : le point S qui a pour abscisse $\alpha = \frac{-b}{2a}$ (A CALCULER)
- *Et pour ordonnée* $\beta = f\left(\frac{-b}{2a}\right)$ (A CALCULER)
- et qui est *« tournée vers le haut »* si $a > 0$ (ou qui est *« tournée vers le bas »* si $a < 0$)

Théorème

Une fonction polynôme du second degré est :

Si $a > 0$:

strictement décroissante sur $\left]-\infty; \frac{-b}{2a}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{-b}{2a}; +\infty\right[$.

Si $a < 0$:

strictement croissante sur $\left]-\infty; \frac{-b}{2a}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{-b}{2a}; +\infty\right[$.

Tableau de variations d'une fonction polynôme du second degré pour $a > 0$

x	$-\infty$		$-b/2a$		$+\infty$
f		$\searrow$	min	$\nearrow$	

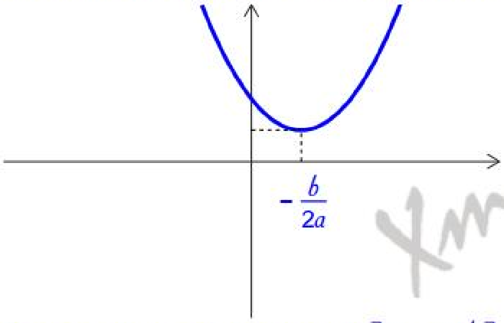
Tableau de variations d'une fonction polynôme du second degré pour $a < 0$

x	$-\infty$		$-b/2a$		$+\infty$
f		$\nearrow$	max	$\searrow$	

« IMAGE MENTALE » à mémoriser

La représentation graphique d'une fonction trinôme définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ est une parabole.
Son sommet a pour abscisse $-\frac{b}{2a}$ et pour ordonnée $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.
La parabole a pour axe de symétrie la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$

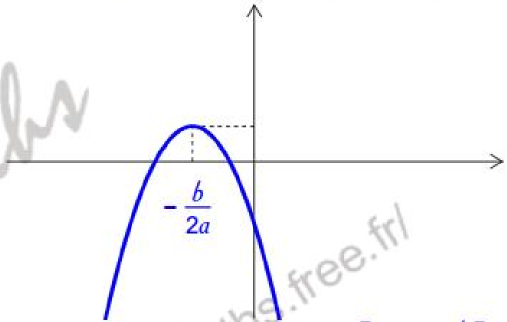
Si $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut.



f est strictement décroissante sur $\left]-\infty \,;\, -\frac{b}{2a}\right]$
et strictement croissante sur $\left[-\frac{b}{2a} \,;\, +\infty\right[$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
f		$\searrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$	

Si $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas



f est strictement croissante sur $\left]-\infty \,;\, -\frac{b}{2a}\right]$
et strictement décroissante sur $\left[-\frac{b}{2a} \,;\, +\infty\right[$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
f		$\nearrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\searrow$	

METHODE A RETENIR *Soit une fonction f telle que $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$*

1) *Poser* $a = ...$ $\quad b = ...$ *et* $c = ...$
2) *Calculer* $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = ...$
3) *Calculer* $\beta = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = ...$
4) *On peut alors tracer la tableau de variation de la fonction f et tracer la parabole C_f*

A SAVOIR : La parabole C_f a pour axe de symétrie la droite verticale d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$

Définition 1 : On appelle fonction polynôme du second degré (ou trinôme du second degré) toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire : $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, où a, b et c sont des réels, $a \neq 0$.

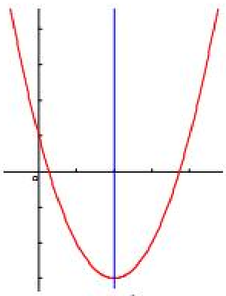
Propriété 1 : Le tableau de variation de la fonction *f* définie par $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ est :

$a > 0$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	↗ $+\infty$

$a < 0$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	↘ $-\infty$

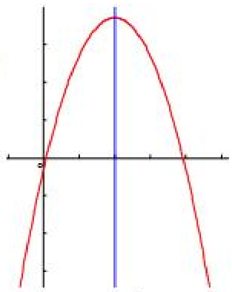


$a > 0$

Dans un repère orthonormé, la représentation graphique de la fonction *f* est une parabole ; son sommet a pour coordonnées :

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right).$$

(avec $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = -\dfrac{\Delta}{4a}$)



$a < 0$

Si $a > 0$, la concavité de la parabole est tournée vers les *y* positifs.

Si $a < 0$, la concavité de la parabole est tournée vers les *y* négatifs.

Remarque : La droite (verticale) d'équation : $x = -\dfrac{b}{2a}$ est un axe de symétrie de la parabole.

NE PAS OUBLIER D'UTILISER LA CALCULTRICE POUR TRACER LES FONCTIONS
AFIN DE VERIFIER SI UN TABLEAU DE VARIATION EST COHERENT AVEC SA REPRESENTATION GRAPHIQUE…

3 EXERCICES :

EXERCICE N° 1 : TRACER LE TABLEAU DE VARIATION PUIS LA REPRESENTATION GRAPHIQUE DE LA FONCTION DEFINIE PAR $u(x)=3x^2-6x-1$ SUR L'INTERVALLE $[-5,5]$

$a=3$ $b=-6$ et $c=-1$

Calcul de $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-6}{2\times 3} = 1$

Calcul de $\beta = u\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = u(1) = 3\times 1^2-6\times 1-1 = 3-6-1=-4$

La forme canonique de la fonction est donc $u(x)=3(x-1)^2+(-4)$ c'est-à-dire $u(x)=3(x-1)^2-4$

Sa courbe représentative est une parabole, elle admet un axe de symétrie la droite d'équation $x = 1$ (s = 1) comme a = 3 (strictement positif), le tableau de variation est donc :

x	-5		1		5
$u(x)$	104	↘	−4	↗	44

$u(-5) = 3(-5-1)^2 - 4 = 104$ $u(1) = -4$ $u(5) = 44$

EXERCICE N° 2 : TRACER LE TABLEAU DE VARIATION PUIS LA REPRESENTATION GRAPHIQUE DE LA FONCTION DEFINIE PAR $v(x)=-4x^2+16x-11$ SUR L'INTERVALLE $[-3,3]$

$a=-4$ $b=16$ et $c=-11$

Calcul de $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{16}{2\times(-4)} = -\dfrac{16}{-8} = 2$

Calcul de $\beta = u\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = u(2) = -4\times 2^2+16\times 2-11 = -16+32-11=5$

La forme canonique de la fonction est donc $v(x)=-4(x-2)^2+5$

Sa courbe représentative est une parabole, elle admet un axe de symétrie la droite d'équation $x = 2$ (s = 2) comme a = -4 , (strictement négatif), le tableau de variation est donc :

x	−3		2		3
$v(x)$	−95	↗	5	↘	1

$v(-3) = -4(-3-2)^2 + 5 = -95$ $v(2) = 5$ $v(3) = -4(3-2)^2 + 5 = 1$

EXERCICE N° 3 :

Exercice-type I : Soit u la fonction polynôme définie sur I = [-5 ;5] par $\mathbf{u(x)} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^2 + \mathbf{x} - \mathbf{4}$.

Question 1 : Montrer que pour tout x dans I, $\mathbf{u(x)} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}+\mathbf{1})^2 - \frac{9}{2}$.

Question 2 : Etablir le tableau de variations de u.

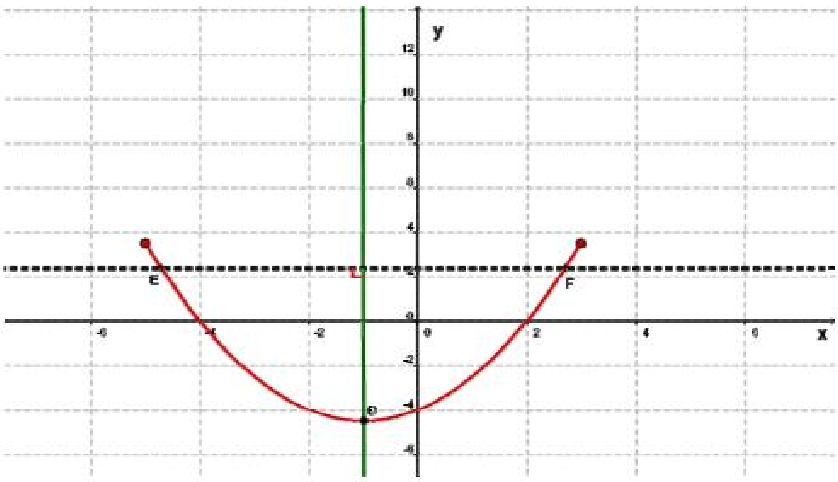
Question 3 : Tracer la courbe représentative de u. Peut-on affirmer que cette courbe possède un axe de symétrie ?

Question 1. $\frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}(x^2+2x+1) - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}x^2 + x - 4 = u(x)$.

Question 2. D'après le cours ci-dessus, étant donné que , ½, coefficient du terme au carré, est strictement positif, le tableau de variations de u est :

x	-5		-1		5
$f(x)$	3,5	↘	$-\frac{9}{2}$	↗	13,5

Question 3. Pour répondre à cette question, on va tracer la courbe de u sur un intervalle centré en -1. Ici, on choisit l'intervalle $[-5; 3]$.



Et voilà la fonction u de l'exercice-type :