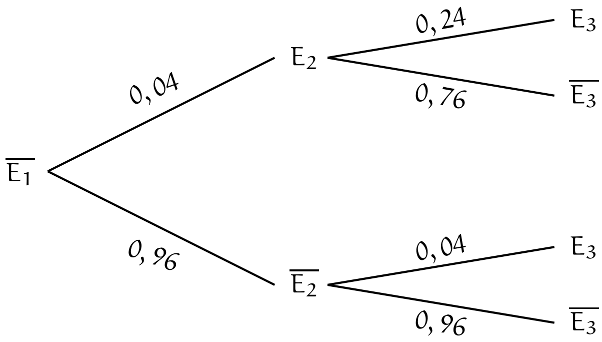
Pondichéry 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

1) a) Représentons la situation par un arbre (E_1 est impossible et donc $\overline{E_1}$ est certain).



La probabilité demandée est $p_3 = p(E_3)$. La formule des probabilités totales fournit

$$\begin{aligned} p_3 &= p\left(E_2 \cap E_3\right) + p\left(\overline{E_2} \cap E_3\right) = p\left(E_2\right) \times p_{E_2}(E_3) + p\left(\overline{E_2}\right) \times p_{\overline{E_2}}(E_3) \\ &= 0,04 \times 0,24 + 0,96 \times 0,04 = 0,0096 + 0,0384 = 0,048. \end{aligned}$$

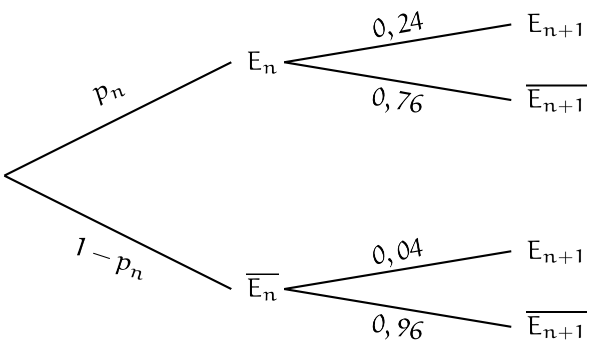
$$\boxed{p_3 = 0,048.}$$

b) La probabilité demandée est $p_{E_3}\left(E_2\right)$.

$$p_{E_3}\left(E_2\right) = \frac{p\left(E_2 \cap E_3\right)}{p\left(E_3\right)} = \frac{p\left(E_2\right) \times p_{E_2}\left(E_3\right)}{p\left(E_3\right)} = \frac{0,04 \times 0,24}{0,048} = \frac{0,0096}{0,048} = \frac{96}{480} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

$$\boxed{p_{E_3}\left(E_2\right) = 0,2.}$$

2) a)



b) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. D'après la formule des probabilités totales.

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p\left(E_n\right) \times p_{E_n}\left(E_{n+1}\right) + p\left(\overline{E_n}\right) \times p_{\overline{E_n}}\left(E_{n+1}\right) = 0,24p_n + 0,04(1 - p_n) \\ &= 0,2p_n + 0,04. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ supérieur ou égal à } 1,\ p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04.}$$

c) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,05 = 0,2p_n + 0,04 - 0,05 = 0,2p_n - 0,01 = 0,2(p_n - 0,05) = 0,2u_n.$$

Donc la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $r = 0,2$ et de premier terme $u_1 = p_1 - 0,05 = -0,05$.

On sait alors que pour tout entier naturel non nul n,

$$u_n = u_1 \times r^{n-1} = -0,05 \times 0,2^{n-1},$$

et donc

$$p_n = u_n + 0,05 = 0,05 - 0,05 \times 0,2^{n-1}.$$

$$\boxed{\text{pour tout } n \text{ supérieur ou égal à 1, } p_n = 0,05 - 0,05 \times 0,2^{n-1}.}$$

d) Puisque $-1 < 0,2 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,2^{n-1} = 0$. On en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = 0,05.}$$

e) A l'étape 1, P contient p_1 et plus généralement, à l'étape $j \geqslant 1$, P contient p_j. L'algorithme s'arrête dès que la variable J contient un numéro j tel que $p_j \geqslant 0,05 - 10^{-k}$ (où k est la valeur entrée dans la variable K). A partir de ce numéro, tous les termes de la suite sont supérieurs ou égaux à $0,05 - 10^{-k}$.

L'algorithme affiche donc le plus petit numéro j tel que $p_j \geqslant 0,05 - 10^{-k}$.

Puisque la suite (p_n) converge vers $0,05$, pour tout entier naturel K, il existe un rang n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, $p_n \geqslant 0,05 - 10^{-K}$. On en déduit que cet algorithme s'arrête.

3) a) X suit une loi binomiale. En effet,

- 220 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues à savoir « le salarié est malade » avec une probabilité $p = 0,05$ et « le salarié n'est pas malade » avec une probabilité $p = 1 - 0,05 = 0,95$.

Donc, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 220$ et $p = 0,05$.

On sait que $\mu = np = 220 \times 0,05 = 11$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{10,45} = 3,23$ à 10^{-2} près.

b) La probabilité demandée est $p(7 \leqslant X \leqslant 15)$. Or,

$$7 \leqslant X \leqslant 15 \Leftrightarrow \frac{7-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{15-\mu}{\sigma}.$$

La probabilité demandée est donc aussi $p\left(\frac{7-11}{\sqrt{10,45}} \leqslant \frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{15-11}{\sqrt{10,45}}\right)$ ou encore $p\left(-1,24 \leqslant \frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant 1,24\right)$ en arrondissant les bornes de l'encadrement à 10^{-2}.

L'énoncé nous dit que cette probabilité est environ :

$$\begin{aligned} p\left(-1,24 \leqslant Z \leqslant 1,24\right) &= p(Z \leqslant 1,24) - p(Z \leqslant -1,24) = p(Z < 1,24) - p(Z < -1,24) \\ &= 0,892 - 0,108 = 0,784. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La probabilité demandée vaut environ } 0,784.}$$

