

Exercice de probabilité (niveau 2)**Énoncé de l'exercice :**

Une puce se déplace sur un axe gradué ET à chaque saut elle se déplace d'une unité **de manière aléatoire et équiprobable vers la gauche ou la droite.**

Elle part de l'origine et effectue 30 sauts.

Dessiner (**et calculer**) le tableau de probabilité correspondant aux différentes «**positions possibles**» de cette puce suite aux **30 sauts** sur cet axe gradué.

Indication :

Suite aux 30 sauts : cette puce peut se situer à : -30 ou -29 ou -28 ou à 0 ou +1 ou +2 ou +28 ou +29 ou +30

Quelques explications pour répondre à la question de cet exercice :

On a par « symétrie » $P(D = d) = P(D = -d) \quad \forall d \in \llbracket [0, 30] \rrbracket$ c'est-à-dire $d \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq d \leq 30$

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de saut vers la droite de cette puce

Et

Soit Y la variable aléatoire qui compte le nombre de saut vers la gauche de cette puce

Et

Soit D la variable aléatoire qui donne la position de la puce sur l'axe gradué suite au 30^{ème} saut

On a : $X + Y = 30$ et $D = X - Y$ avec X et Y 2 variables aléatoires qui suivent la loi binomiale $B\left(30, \frac{1}{2}\right)$

Remarque n°1 : Comme $X + Y = 30$

si $X = x$ avec x un nombre impair alors Y est également un nombre impair et $D = X - Y$ est un nombre pair

si $X = x$ avec x un nombre pair alors Y est également un nombre pair et $D = X - Y$ est un nombre pair

Conclusion : la variable aléatoire D « est un entier pair » tel que $-30 \leq D = d \leq 30$ (c'est-à-dire $d \in 2\mathbb{Z}$)

Remarque n°2 : On veut calculer $P(D = d)$ avec $d \in \llbracket [-30, 30] \rrbracket$

Comme $D = X - Y$ et $Y = 30 - X$ on a donc $D = 2X - 30$

On cherche donc à calculer $P(D = d) = P(2X - 30 = d)$ avec $d \in \llbracket [-30, 30] \rrbracket$

Comme d est pair : Posons $d = 2n$

On cherche à calculer $P(D = 2n) = P(2X - 30 = 2n) = P(X = n + 15)$ avec $n \in \llbracket [-15, 15] \rrbracket$

Posons $x = n + 15$

On a $P(D = 2n) = P(X = x)$ avec $x \in \llbracket [0, 30] \rrbracket$

Comme X suit la loi Binomiale $B\left(30, \frac{1}{2}\right)$ sur $\llbracket [0, 30] \rrbracket$ on a $P(X = x) = \binom{30}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{30-x} = \binom{30}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{30}$

Conclusion :

Soit $d \in \llbracket [-30, 30] \rrbracket$ c'est-à-dire un entier relatif tel que $-30 \leq d \leq 30$

- Si d est impair alors $P(D = d) = 0$

- Si d est pair et si $d = 2x - 30$ avec $x \in \llbracket [0, 30] \rrbracket$ alors $P(D = d) = P(X = x) = \binom{30}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{30}$

CALCUL du tableau de probabilités via le tableur EXCEL

Soit X une V.A. qui SUIT la loi Binomiale de paramètre $n = 30$ et $p = 0,5$

x	$P(X = x)$	$d = 2x - 30$	$P(D = d) = P(X = x)$
0	9,31323E-10	-30	9,31323E-10
1	2,79397E-08	-28	2,79397E-08
2	4,05125E-07	-26	4,05125E-07
3	3,78117E-06	-24	3,78117E-06
4	2,55229E-05	-22	2,55229E-05
5	0,000132719	-20	0,000132719
6	0,000552996	-18	0,000552996
7	0,001895986	-16	0,001895986
8	0,005450961	-14	0,005450961
9	0,013324572	-12	0,013324572
10	0,027981601	-10	0,027981601
11	0,050875638	-8	0,050875638
12	0,080553093	-6	0,080553093
13	0,111535052	-4	0,111535052
14	0,13543542	-2	0,13543542
15	0,144464448	0	0,144464448
16	0,13543542	2	0,13543542
17	0,111535052	4	0,111535052
18	0,080553093	6	0,080553093
19	0,050875638	8	0,050875638
20	0,027981601	10	0,027981601
21	0,013324572	12	0,013324572
22	0,005450961	14	0,005450961
23	0,001895986	16	0,001895986
24	0,000552996	18	0,000552996
25	0,000132719	20	0,000132719
26	2,55229E-05	22	2,55229E-05
27	3,78117E-06	24	3,78117E-06
28	4,05125E-07	26	4,05125E-07
29	2,79397E-08	28	2,79397E-08
30	9,31323E-10	30	9,31323E-10
Total	1		1