Probabilités conditionnelles
Loi binomiale

1 Probabilité

1.1 Généralités

Lors d'une expérience aléatoire :

- L'univers Ω est l'ensemble des issues possibles.
- Un événement A est une partie de l'univers.
- Un événement élémentaire e_i est un événement ne comportant qu'un seul élément.
- L'événement contraire de l'événement A est l'événement noté $\overline{A}$ formé de tous les éléments de Ω n'appartenant pas à A.
- L'événement $A \cap B$ (noté aussi "A et B") est l'événement formé des éléments de Ω appartenant à A et à B.
- L'événement $A \cup B$ (noté aussi "A ou B") est l'événement formé des éléments de Ω appartenant au moins à l'un des événements A ou B.
- Deux événements A et B sont dits incompatibles si $A \cap B = \varnothing$.
- Si $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ et si à chaque issue e_i on associe un nombre $P(e_i)$ tel que $0 \leqslant P(e_i) \leqslant 1$ et $P(e_1) + P(e_2) + \cdots + P(e_n) = 1$, on dit que l'on a défini une loi de probabilité sur Ω.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

Pour tous événements A et B :

- $P(\varnothing) = 0\,; \quad P(\Omega) = 1$
- $0 \leqslant P(A) \leqslant 1\,; \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  (si A et B sont incompatibles alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$)
- Pour une loi équirépartie :

$$P(A) = \frac{\text{nbre d'éléments de A}}{\text{nbre d'éléments de }\Omega} = \frac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas possibles}}$$

1.2 Variable aléatoire

Une variable aléatoire X définie sur un univers Ω est une fonction qui à chaque issue associe un réel x_i. La probabilité que X prenne la valeur x_i est alors notée $P(X = x_i)$ ou p_i.

- Définir la loi de probabilité de X, c'est donner (sous forme d'un tableau) la probabilité de chacun des événements $X = x_i$.
- Espérance mathématique de X : $E(X) = \sum p_i x_i = p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n$
  L'espérance représente la valeur moyenne que prend X si on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire
- Variance de X : $V(X) = \sum p_i x_i^2 - E^2(X) = p_1 x_1^2 + \cdots + p_n x_n^2 - E^2(X)$
- Écart-type de X : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Exemple : On lance 3 fois de suite un dé. Le joueur gagne 6 euros s'il n'obtient aucun 1 et aucun 2 et il perd 3 euros dans le cas contraire. X, la variable aléatoire égale au gain du joueur, ne peut prendre que les valeurs -3 et 6.

On a $P(X=6) = \dfrac{4^3}{6^3} = \dfrac{8}{27}$ et $P(X=-3) = 1 - p(X=6) = \dfrac{19}{27}$

$$E(X) = -3 \times \frac{19}{27} + 6 \times \frac{8}{27} = -\frac{1}{3}$$

$$V(X) = (-3)^2 \times \frac{19}{27} + 6^2 \times \frac{8}{27} - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{152}{9} \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{\frac{152}{9}} = \frac{2\sqrt{38}}{3}$$

2 Probabilités conditionnelles

Etant donné deux événements A et B ($B \neq \varnothing$) d'un univers Ω. On appelle probabilité de B sachant A, le réel noté $P_A(B)$ tel que :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

On a alors : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$

3 Indépendance de deux événements

Deux événements A et B sont indémendants si et seulement si :

$$P_A(B) = P(B) \quad \Leftrightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

4 Loi binomiale

- On appelle épreuve de Bernoulli toute expérience aléatoire ne présentant que deux issues possibles (contraire l'une de l'autre)
- On appelle schéma de Bernoulli toute répétition d'épreuves de Bernouilli identiques et indépendantes

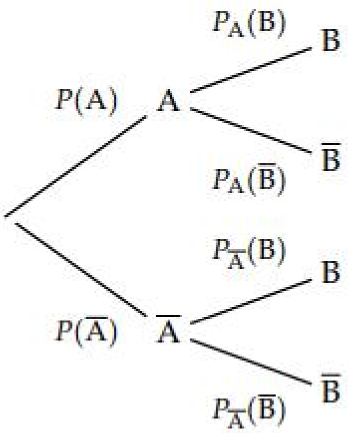
Étant donné une épreuve de Bernoulli où la probabilité d'obtenir un succès S est p et le schéma de Bernoulli consistant à répéter n fois de manière indépendante cette épreuve.
Si on note X la variable aléatoire qui à chaque issue possible du schéma de Bernoulli associe le nombre de fois où est apparu un succès S, la loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale** de paramètres n et p et est notée $\mathscr{B}(n;p)$.

- Probabilité d'obtenir k succès : $P(\mathrm{X}=k)=\binom{n}{k}\,p^k\,(1-p)^{n-k}$
- Espérance de X : $E(\mathrm{X})=np$
- Variance et écart-type de X : $V(\mathrm{X})=np(1-p)$; $\sigma(\mathrm{X})=\sqrt{np(1-p)}$

Formule des probabilités totales
Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment une partitions de Ω (2 à 2 incompatibles et leur union forme Ω), alors pour tout événement B, on a :
$P(B) = P(A_1 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + \cdots + P(A_n)P_{A_n}(B)$

Représentation par un arbre pondéré

Le cas le plus fréquent correspondond à la partition la plus simple (A et $\overline{A}$). Si on connaît les probabilité de B et $\overline{B}$ par l'intermédiare de A et $\overline{A}$, on a l'arbre suitvant :

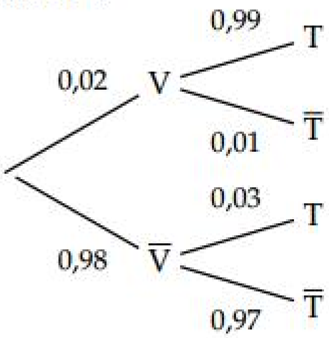


- Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin.
  $P(A) \times P_A(B) = P(A \cap B)$
- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).
  $P_A(B) + P_{\overline{A}}(B) = 1$
- La probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à E.
  $P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$

Exemple : Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population. On note V l'événement « la personne est contaminée par le virus » et T l'événement « le test est positif ».



- Quelle est la probabilité que le test soit positif
  $P(T) = 0,02 \times 0,99 + 0,98 \times 0,03 = 0,0492$
- Quelle est la probabilité que la personne soit contaminée sachant que le test est positif :
  $$P_T(V) = \frac{P(T \cap V)}{P(T)} = \frac{0,02 \times 0,99}{0,0492} = 0,4024$$