

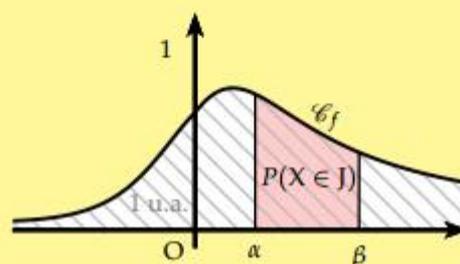
Lois à densité. Loi normale

1 Lois à densité

1.1 Généralités

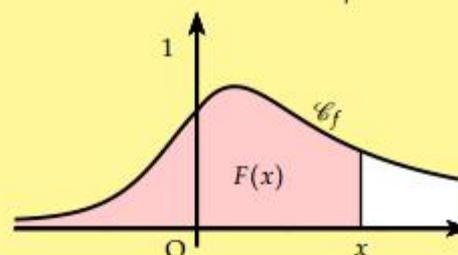
Définition 1 On appelle **densité de probabilité** d'une variable aléatoire continue X , la fonction f continue et positive sur un intervalle I ($[a; b]$, $[a; +\infty[$ ou \mathbb{R}) telle que :

- $P(X \in I) = \int_{(I)} f(t) dt = 1$
- Pour tout intervalle $J = [\alpha, \beta]$,
on a : $P(X \in J) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$



- La fonction F définie par :
 $F(x) = P(X \leq x)$ est appelée la **fonction de répartition** de la variable X

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$



- L'espérance mathématique d'une variable aléatoire continue X , de densité f sur I , est :

$$E(X) = \int_{(I)} t f(t) dx$$

1.2 Loi uniforme

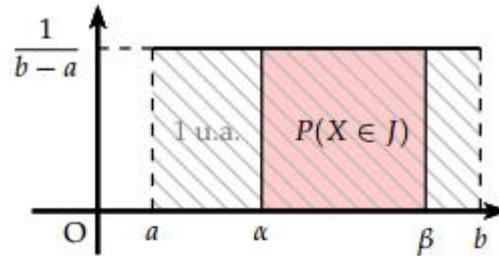
Définition 2 X suit une loi uniforme sur $I = [a, b]$, alors :

$$f(t) = \frac{1}{b-a}$$

Pour tout intervalle $J = [\alpha, \beta]$ inclus dans I , on a :

$$P(X \in J) = \frac{\beta - \alpha}{b - a} = \frac{\text{longueur de } J}{\text{longueur de } \bar{I}}$$

La probabilité est proportionnelle à la longueur de l'intervalle.



1.3 Loi exponentielle

Définition 3 X suit une loi exponentielle de paramètre réel λ alors :

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

On a les relations suivantes

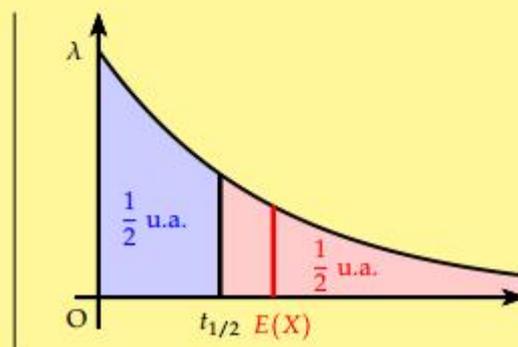
- La fonction de répartition : $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
- $P(X \leq a) = 1 - e^{-\lambda a}$ et $P(X \geq a) = e^{-\lambda a}$
- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$

Théorème 1 La loi exponentielle est une loi **sans mémoire**

$$\forall t > 0 \text{ et } h > 0 \text{ on a } P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$$

Théorème 2 X suit une loi exponentielle de paramètre λ alors :

- l'espérance : $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
- La demi vie : $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$
- $E(X) = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} \simeq 1,44 t_{1/2}$



2 La loi normale

2.1 La loi normale centrée réduite

Définition 4 On appelle densité de probabilité de Laplace-Gauss, la fonction φ définie sur \mathbb{R} par :

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

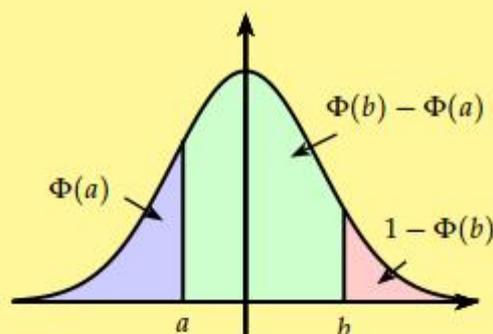
X suit une loi normale centrée réduite, $\mathcal{N}(0, 1)$, si sa densité de probabilité est égale à la fonction φ .

Sa fonction de répartition Φ vaut : $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$

L'espérance de X vaut 0 et son écart-type 1 d'où $\mathcal{N}(0, 1)$

Théorème 3 X suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors pour tous réels a et $b > a$ on a :

- $P(X \leq a) = \Phi(a)$
- $P(X \geq b) = 1 - \Phi(b)$
- $P(a \leq X \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$
- $P(X \leq -|a|) = 1 - \Phi(|a|)$



Théorème 4 X est une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite. Soit $\alpha \in]0; 1[$, il existe un **unique** réel **strictement positif** u_α tel que :

$$P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$

Il est bon de retenir les valeurs de $u_{0,05}$ et $u_{0,01}$:

- $P(-1.96 \leq X \leq 1.96) = 0,95$
- $P(-2.58 \leq X \leq 2.58) = 0,99$

2.2 La loi normale générale

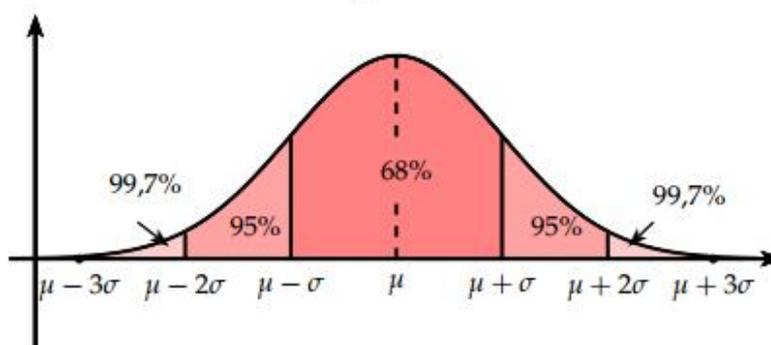
Définition 5 Changement de variable

X suit une loi normale de paramètres $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \text{ suit une loi normale } \mathcal{N}(0, 1)$$

On a alors : $E(X) = \mu$ et $V(X) = \sigma^2$

On obtient les intervalles caractéristiques :



2.3 Approximation normale d'une loi binomiale

Théorème 5 Théorème de Moivre-Laplace

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et Z tel que :

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)} = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

Pour tous nombres a et b tels que $a < b$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(a \leq Z \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Conditions de l'approximation d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par une loi normale $\mathcal{N}(np, np(1-p))$

$$n \geq 30, \quad np \geq 5 \quad \text{et} \quad n(1-p) \geq 5$$

⚠ Faire la correction de continuité : $P(7 \leq X \leq 15) = P_N(6,5 \leq X \leq 15,5)$