PROBABILITE: Variables aléatoires dites « discrètes »

8-1 Généralités

Lors d'une expérience aléatoire :
- L'univers Ω est l'ensemble des résultats possibles.
- Un événement A est une partie de l'univers.
- Un événement élémentaire est un événement ne comportant qu'un seul élément.
- L'événement contraire de l'événement A est l'événement noté $\overline{A}$ formé de tous les éléments de Ω n'appartenant pas à A.
- L'événement $A \cap B$ (noté aussi «A et B») est l'événement formé des éléments de Ω appartenant à A et à B.
- L'événement $A \cup B$ (noté aussi «A ou B») est l'événement formé des éléments de Ω appartenant au moins à l'un des événements A ou B.
- Deux événements A et B sont dits incompatibles si $A \cap B = \varnothing$.
- Si $\Omega = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ et si à chaque résultat possible e_i on associe un nombre $p(e_i)$ tel que $0 \leqslant p(e_i) \leqslant 1$ et $p(e_1) + p(e_2) + \cdots + p(e_n) = 1$, on dit que l'on a défini une loi de probabilité sur Ω.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

Pour tous événements A et B :

- $p(\varnothing) = 0$; $\quad p(\Omega) = 1$
- $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$; $\quad p(\overline{A}) = 1 - p(A)$; $\quad p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
(si A et B sont incompatibles, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$)
- Dans le cas de l'équiprobabilité, $p(A) = \dfrac{\text{nb d'éléments de A}}{\text{nb d'éléments de }\Omega} = \dfrac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb de cas possibles}}$

► *Exemple :* Tirage au hasard d'une carte dans un jeu de 32 cartes avec les événements :

$p(\text{la carte tirée est un roi}) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$ $\qquad p(\text{la carte tirée est un coeur}) = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$

$p(\text{la carte tirée est un roi } \underline{\text{et}} \text{ un coeur}) = \dfrac{1}{32}$ $\qquad p(\text{la carte tirée est un roi } \underline{\text{ou}} \text{ un coeur}) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{32} = \dfrac{11}{32}$

8-2 Probabilités conditionnelles

DÉFINITION

Etant donné deux événements A et B ($B \neq \varnothing$) d'un univers Ω :
- On appelle probabilité de B sachant A, le réel noté $p_A(B)$ tel que $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$

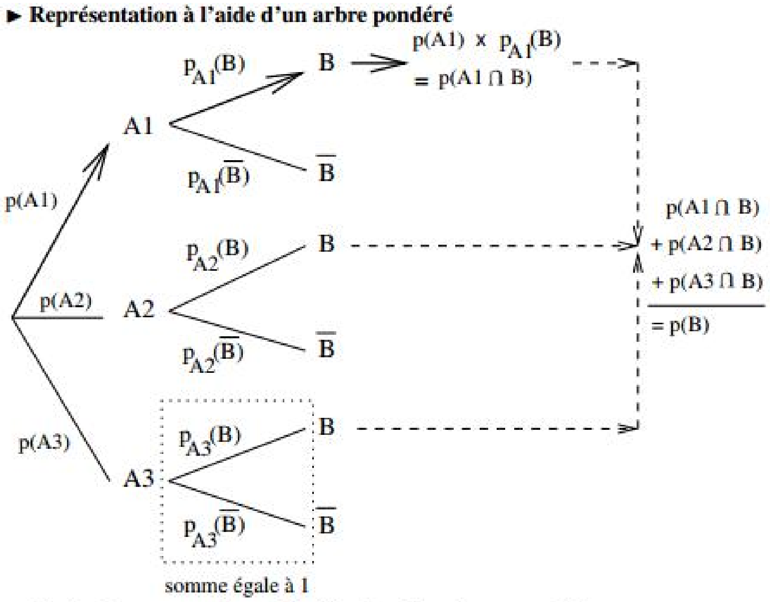
PROPRIÉTÉ

Pour tous événements non vides A et B :
- $0 \leqslant p_A(B) \leqslant 1$; $\quad p_A(\overline{B}) = 1 - p_A(B)$
- Dans le cas de l'équiprobabilité, $p_A(B) = \dfrac{\text{nb de cas favorables pour } A \cap B}{\text{nb de cas favorables pour A}}$
- $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = p(B) \times p_B(A)$

PROPRIÉTÉ

Formule des probabilités totales
Si $A_1, A_2, \cdots, A_n$ sont des événements non vides deux à deux incompatibles et dont l'union est égale à Ω (on dit alors qu'ils forment une partition de l'univers) alors pour tout événement B :
- $p(B) = p(A_1 \cap B) + \cdots + p(A_n \cap B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + \cdots + p(A_n) \times p_{A_n}(B)$

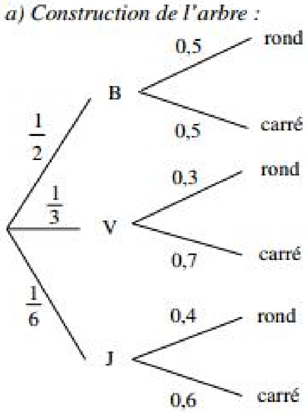
► **Représentation à l'aide d'un arbre pondéré**



► **Règles de construction et d'utilisation des arbres pondérés :**
- Sur les premières branches, on inscrit les $p(A_i)$.
- Sur les branches du type $A_i \longrightarrow B$, on inscrit $p_{A_i}(B)$.
- Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin.
- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).
- La probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à E.

► *Exemple :* Un sac contient des jetons de trois couleurs, la moitié de blancs, le tiers de verts et le sixième de jaunes. 50% des jetons blancs, 30% des jetons verts et 40% des jetons jaunes sont ronds. Tous les autres jetons sont carrés. On tire au hasard un jeton.

a) Construction de l'arbre :



b) Sachant que le jeton tiré est blanc, quelle est la probabilité pour qu'il soit carré ?

La lecture directe de l'arbre nous donne que $p_B(C) = 0,5$.

c) Quelle est la probabilité pour que le jeton tiré soit rond ?

$p(R) = \frac{1}{2} \times 0,5 + \frac{1}{3} \times 0,3 + \frac{1}{6} \times 0,4 = \frac{5}{12}$.

d) Sachant qu'il est rond, quelle est la probabilité pour qu'il soit blanc ?

$p_R(B) = \frac{p(B \cap R)}{p(R)} = \frac{\frac{1}{2} \times 0,5}{\frac{5}{12}} = \frac{3}{5}$.

8-3 Indépendance en probabilité

DÉFINITION

- Deux événements A et B sont dits indépendants si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.
- Ce qui revient à dire que $p_A(B) = p(B)$ ou $p_B(A) = p(A)$

► *Conséquence :* Si l'on répète n fois dans les mêmes conditions la même expérience et si ces expériences $A_1, A_2, \cdots, A_n$ sont indépendantes, alors la probabilité de l'événement $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ est égale au produit $p(A_1) \times p(A_2) \times \cdots \times p(A_n)$.

► *Exemple :* Si on lance n fois un dé, la probabilité d'obtenir n fois un nombre pair est égal à $(0,5)^n$.

8-4 Loi numérique associée à une expérience aléatoire

On considère une expérience aléatoire où à chaque résultat possible on peut associer un réel X. On note x_i les valeurs possibles de X et p_i la probabilité que X prenne la valeur x_i .

- Définir la loi de probabilité de X, c'est donner (sous forme d'un tableau) la probabilité de chacun des événements $X = x_i$.
- Espérance mathématique de X : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n$
- Variance de X : $V(X) = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i (x_i)^2\right) - (E(x))^2 = p_1 (x_1)^2 + \cdots + p_n (x_n)^2 - (E(x))^2$
- Ecart-type de X : $\sigma(X) = \sqrt{V(x)}$

► *Exemple :* On lance un dé. Le joueur gagne 6 euros s'il obtient un «1» ou un «6» et il perd 2 euros dans le cas contraire. Soit X le gain du joueur.
Loi de probabilité de X : X ne peut prendre que les valeurs -2 et 6.
On a $p(X = -2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ et $p(X = 6) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

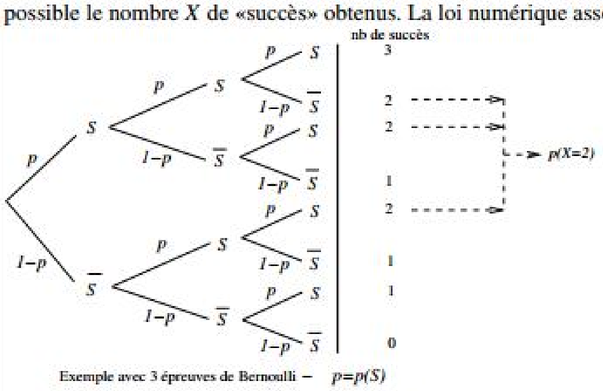
x_i	-2	6
p_i *(la somme doit être égale à 1)*	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

$E(X) = \frac{2}{3} \times (-2) + \frac{1}{3} \times 6 = \frac{2}{3}$; $V(X) = \frac{2}{3} \times (-2)^2 + \frac{1}{3} \times (6)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{128}{9}$ et $\sigma(X) = \sqrt{\frac{128}{9}} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$

8-5 Loi binomiale

DÉFINITION

- On appelle **épreuve de Bernoulli** toute expérience aléatoire ne présentant que deux issues possibles (contraires l'une de l'autre) que l'on note en général S (pour «succès») et $\overline{S}$.
- Si on répéte plusieurs fois de façon identique et indépendante une épreuve de Bernoulli, on peut associer à chaque résultat possible le nombre X de «succès» obtenus. La loi numérique associée à X s'appelle alors une **loi binomiale**.



Exemple avec 3 épreuves de Bernoulli — $p=p(S)$

$p(X = 2) = p \times p \times (1-p) + p \times (1-p) \times p + (1-p) \times p \times p = 3 \times (1-p) \times p^2$