PROBABILITE 2ième Partie : Variables aléatoires continues (de densité une fonction f)

I) Variables aléatoires continues :

L'ensemble des éventualités Ω est $\mathbb{R}$

Les évènements sont les intervalles, et tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ que l'on peut former en combinant des intervalles par intersections et réunions.

(En théorie de la mesure, on les appelle des boréliens)

Définition : On appelle densité de probabilité : une fonction de $\mathbb{R}$ **dans** $\mathbb{R}^+$ qui est continue par morceaux **et QUI EST d'intégrale 1** , c'est-à-dire

pour $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$

Etant donnée une densité de probabilité, on définit une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ en associant à tout évènement l'intégrale de la densité sur cet évènement.

$$P[X \in I] = \int_I f(x)\,dx ,$$

Exemple : Pour l'expérience aléatoire consistant à tirer au hasard un réel dans $[\ 0\ ,\ 1\ ]$ (appel de « *Random* »), on considèrera sur $\mathbb{R}$ la loi de probabilité continue, de densité :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \textbf{si} \quad x \in [\ 0{,}1\ ] \\ 0 & \textbf{sinon} \end{cases}$$

Elle donne à tout intervalle inclus dans $[\ 0\ ,\ 1\ ]$ une probabilité égale à sa longueur.

Intuition : La probabilité d'un évènement est la limite de ses fréquences expérimentales sur un grand nombre d'expériences indépendantes.

Cette intuition comporte plusieurs coins d'ombres. Que les fréquences expérimentales convergent sous certaines hypothèses est un théorème (c'est ce théorème qui porte le nom de loi des grands nombres). Pourquoi rajouter l'adjectif "indépendantes" ?

Imaginez une machine de précision à lancer les pièces : un bras articulé muni d'un plateau, relié à un ressort réglable à une valeur fixée une fois pour toutes. Mettons le ressort sous tension, posons la pièce sur le plateau, côté pile, et lâchons le ressort. Au premier essai on ne pourra pas prévoir si la pièce tombera sur pile ou face. Mais l'information apportée par le résultat du premier essai permettra de prévoir les suivants : les expériences ne seront pas indépendantes. Les fréquences expérimentales vaudront 1 ou 0 mais ne fourniront aucun renseignement sur le fait que la pièce soit équilibrée ou non.

D'où l'importance d'indépendance d'évènements et d'expériences aléatoires…

II) Variables aléatoires continues X de densité f_X

Définition : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ et f_X une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$

On dit que X est une variable aléatoire continue de densité f_X si pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$

on a : $P[X \in I] = \int_I f_X(x)dx$

La loi de la variable aléatoire X est la loi continue sur $\mathbb{R}$ de densité f_X .

Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire continue, il faut donc calculer sa densité. De manière équivalente que pour les lois dites « discrètes » , on détermine la loi d'une variable continue en donnant la probabilité qu'elle appartienne à un intervalle I quelconque.

Une variable aléatoire continue X , de densité f_X , tombe entre a et b avec une probabilité égale à :

$$P[a < X < b] = \int_a^b f_X(x)dx$$

Plus la densité f_X est élevée au-dessus d'un segment, plus les chances que X a d'atteindre ce segment sont élevées, ce qui justifie le terme " densité".

Remarque : La probabilité pour une variable aléatoire continue, de tomber sur un point quelconque est nulle.

$$P[X = a] = \int_{\{a\}} f_X(x)dx = 0$$

Par conséquent :

$$P[\ X \in [a,b]\ ] = P[\ X \in [a,b[\ ] = P[\ X \in]a,b]\ ] = P[\ X \in]a,b[\ ]$$

Notons aussi que modifier une densité en un nombre fini ou dénombrable de points ne change pas la valeur des intégrales sur des segments, ni par conséquent la loi de probabilité continue correspondante.

Comme dans le cas discret **quelques exemples de LOI** sont à connaître… dont :

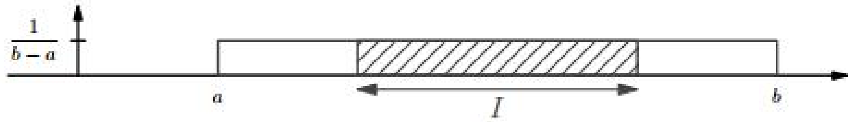
- La **loi uniforme** sur [a , b] avec comme exemple classique la loi « ***Random*** » sur [0 , 1]
- La **loi exponentielle de paramètre** $\lambda > 0$
- La **Loi de Poisson de paramètre** $\lambda > 0$
- **La Loi normale** (appelée aussi loi de Gauss, ou de Laplace-Gauss) qui est la plus célèbre des lois de probabilité. Son succès, et son omniprésence dans les sciences de la vie, viennent du théorème « CENTRAL LIMIT » qui est étudié en classe de Terminale sous le nom de « Moivre-Laplace »)

Exemple : La loi normale de paramètre $\mu \in \mathbb{R}$ *et* $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$ est notée $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

Quelques explications sur la loi UNIFORME :

DÉFINITION

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[a\,;\,b]$ lorsque pour tout intervalle I, inclus dans $[a\,;\,b]$, la probabilité de l'événement « X appartient à I » est égale à l'aire du rectangle de base I et de hauteur $\dfrac{1}{b-a}$.

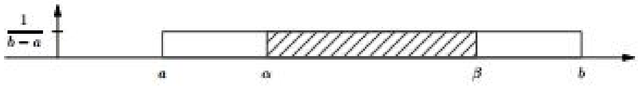


On peut considérer que $p(X \in I) = \displaystyle\int_{x \in I} \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x$. (« aire sous la courbe »)

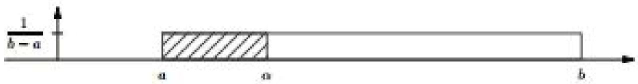
PROPRIÉTÉ

• Si une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[a\,;\,b]$ alors pour tous réels α et β inclus dans $[a\,;\,b]$, on a :

$p(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = \dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$

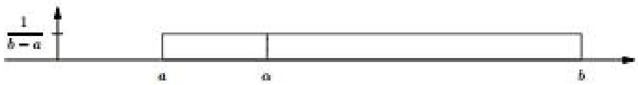


$p(X \leqslant \alpha) = p(a \leqslant X \leqslant \alpha) = \dfrac{\alpha-a}{b-a}$



$p(X \geqslant \beta) = p(\beta \leqslant X \leqslant b) = \dfrac{b-\beta}{b-a}$

$p(X = \alpha) = 0$



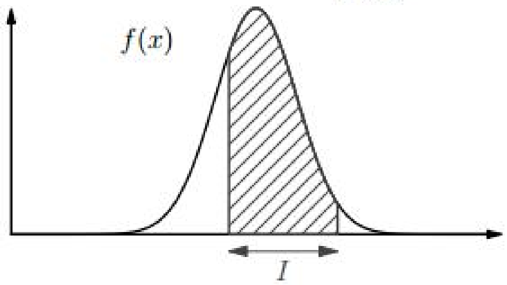
(on a les mêmes résultats avec des inégalités strictes)

• Si une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[a\,;\,b]$ alors **l'espérance** de X est égale à $\dfrac{a+b}{2}$.

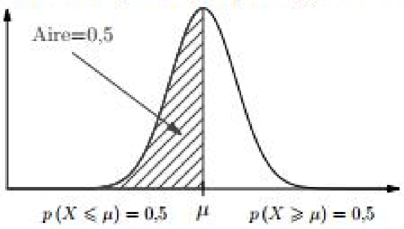
Quelques explications sur la loi NORMALE :

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi normale d'espérance** μ **et d'écart-type** σ lorsque pour tout intervalle I la probabilité de l'événement « X appartient à I » est égale à l'aire sous la courbe sur I de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-0,5\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$



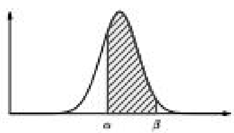
► **Remarque :** L'aire totale sous la courbe est égale à 1 (on dit que f est une densité de probabilité) et la courbe est symétrique par rapport à l'espérance μ. On a donc la situation suivante :



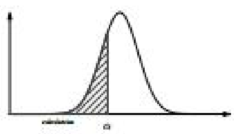
Propriété

• Si une variable aléatoire X suit la **loi normale d'espérance** μ **et d'écart-type** σ alors pour tous réels α et β, on a :

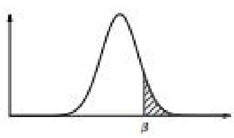
$p(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) =$
TI : DISTR (2nd+VARS) ; `normalcdf` $(\alpha,\beta,\mu,\sigma)$
CASIO : Menu STAT ; DIST ; NORM ; NCD avec
Lower : α ; Upper : β ; σ : σ ; μ : μ



$p(X \leqslant \alpha) =$
TI : `normalcdf` $(-10^{99},\alpha,\mu,\sigma)$
CASIO : NCD avec
Lower : -10^{99} ; Upper : α ; σ : σ ; μ : μ



$p(X \geqslant \beta) =$
TI : `normalcdf` $(\beta,10^{99},\mu,\sigma)$
CASIO : NCD avec
Lower : β ; Upper : 10^{99} ; σ : σ ; μ : μ



• **Valeurs remarquables :**
$p(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0,68$; $p(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0,95$; $p(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0,997$

► *Exemple 1:* (pour tester sa calculatrice)
Si X suit la loi normale d'espérance $\mu = 58$ et d'écart-type $\sigma = 6$, on doit avoir :
$p(52 \leqslant X \leqslant 64) \approx 0,682689$; $p(X \leqslant 55) \approx 0,308538$; $p(X \geqslant 62) \approx 0,252493$

► *Exemple 2:* Le diamètre X des barres métalliques sortant d'un atelier suit la loi normale d'espérance 12 mm (le diamètre attendu) et d'écart-type 0,08 mm. Un client refuse d'acheter des tubes dont le diamètre ne serait pas compris entre 11,9 mm et 12,2 mm. On cherche à déterminer le pourcentage de tubes acceptés par le client.
$p(11,9 \leqslant X \leqslant 12,2) \approx 0,888$, donc 88,8% des tubes sont acceptés par le client.

► *Exemple 3:* Une variable aléatoire suivant une loi normale est telle que $p(X < 2) = 0,067$ et $p(X < 3) = 0,159$. On peut en déduire que $p(X > 2) = 1 - p(X \leqslant 2) = 0,933$ et $p(2 < X < 3) = p(X < 3) - p(X < 2) = 0,092$.

<u>Quelques explications sur la loi EXPONENTIELLE</u> :

Fonction « **densité** » de cette variable aléatoire : $\begin{cases} si \ \ t < 0 \quad alors \quad f(t) = 0 \\ si \ \ t \geq 0 \quad alors \quad f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \end{cases}$ avec $\lambda > 0$

Soit X une variable aléatoire continue qui suit **une loi exponentielle de paramètre** λ

1) alors $\begin{cases} E(X) = \dfrac{1}{\lambda} \\ V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2} \end{cases}$

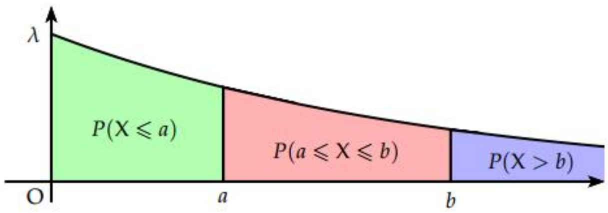
2) alors la fonction de répartition

(avec un nombre $a > 0$) est définie par

$$F(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt = \int_{0}^{a} \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \times \int_{0}^{a} e^{-\lambda t} dt = \lambda \times \left[\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} \right]_0^a = 1 - e^{-\lambda a}$$

3) alors

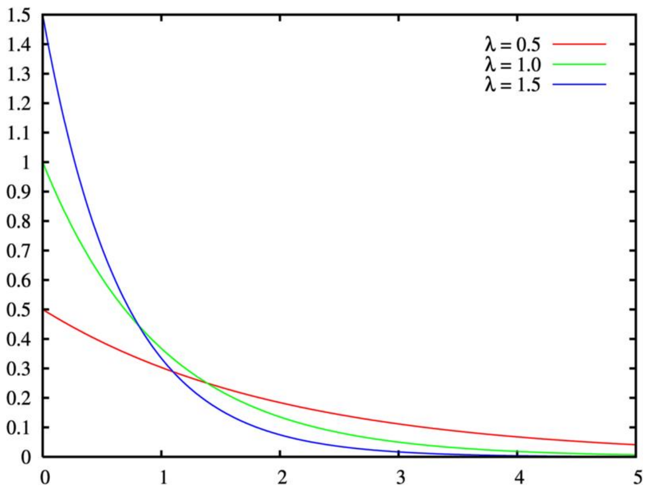
$$P(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$



4) alors cette loi vérifie la propriété **« absence de mémoire »**
c'est-à-dire $\forall\, t > 0$ et $\forall\, h > 0$ $P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$

5) Représentations graphiques d'une **« loi *exponentielle* »** avec différentes valeurs de λ

Fonction densité $si \ \ t \geq 0 \quad alors \quad f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$



*

Fonction de répartition $F(T) = P(X \leq T) = 1 - e^{-\lambda T}$