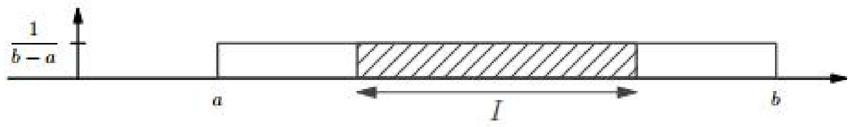
PROBABILITE 2ième Partie : Quelques lois de probabilité à densité

La loi « UNIFORME » :

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[a\,;\,b]$ lorsque pour tout intervalle I, inclus dans $[a\,;\,b]$, la probabilité de l'événement « X appartient à I » est égale à l'aire du rectangle de base I et de hauteur $\dfrac{1}{b-a}$.

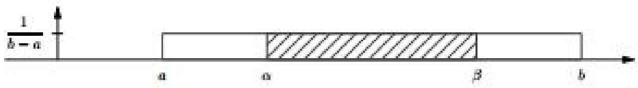


On peut considérer que $p(X \in I) = \displaystyle\int_{x \in I} \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x$. (« aire sous la courbe »)

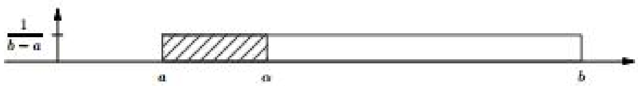
Propriété

• Si une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[a\,;\,b]$ alors pour tous réels α et β inclus dans $[a\,;\,b]$, on a :

$p(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = \dfrac{\beta - \alpha}{b - a}$



$p(X \leqslant \alpha) = p(a \leqslant X \leqslant \alpha) = \dfrac{\alpha - a}{b - a}$



$p(X \geqslant \beta) = p(\beta \leqslant X \leqslant b) = \dfrac{b - \beta}{b - a}$

$p(X = \alpha) = 0$

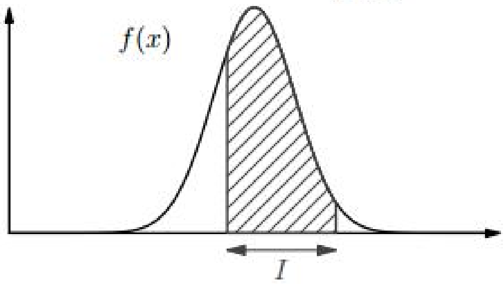
(on a les mêmes résultats avec des inégalités strictes)

• Si une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[a\,;\,b]$ alors **l'espérance** de X est égale à $\dfrac{a+b}{2}$.

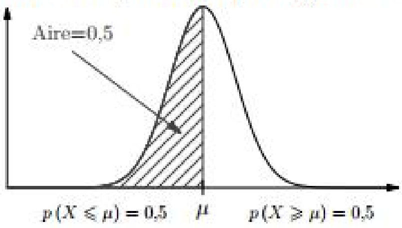
La loi « NORMALE » :

DÉFINITION

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi normale d'espérance** μ **et d'écart-type** σ lorsque pour tout intervalle I la probabilité de l'événement « X appartient à I » est égale à l'aire sous la courbe sur I de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-0,5\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$



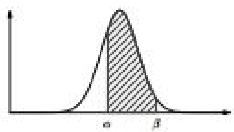
► **Remarque :** L'aire totale sous la courbe est égale à 1 (on dit que f est une densité de probabilité) et la courbe est symétrique par rapport à l'espérance μ. On a donc la situation suivante :



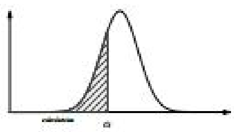
PROPRIÉTÉ

• Si une variable aléatoire X suit la **loi normale d'espérance** μ **et d'écart-type** σ alors pour tous réels α et β, on a :

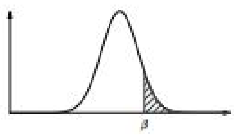
$p(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) =$
TI : DISTR (2nd+VARS) ; `normalcdf` $(\alpha,\beta,\mu,\sigma)$
CASIO : Menu STAT ; DIST ; NORM ; NCD avec
Lower : α ; Upper : β ; σ : σ ; μ : μ



$p(X \leqslant \alpha) =$
TI : `normalcdf` $(-10^{99},\alpha,\mu,\sigma)$
CASIO : NCD avec
Lower : -10^{99} ; Upper : α ; σ : σ ; μ : μ



$p(X \geqslant \beta) =$
TI : `normalcdf` $(\beta,10^{99},\mu,\sigma)$
CASIO : NCD avec
Lower : β ; Upper : 10^{99} ; σ : σ ; μ : μ



• **Valeurs remarquables :**
$p(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma) = 0,68$; $p(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma) = 0,95$; $p(\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma) = 0,997$

► *Exemple 1:* (pour tester sa calculatrice)
Si X suit la loi normale d'espérance $\mu = 58$ et d'écart-type $\sigma = 6$, on doit avoir :
$p(52 \leqslant X \leqslant 64) \approx 0,682689$; $p(X \leqslant 55) \approx 0,308538$; $p(X \geqslant 62) \approx 0,252493$

► *Exemple 2:* Le diamètre X des barres métalliques sortant d'un atelier suit la loi normale d'espérance 12 mm (le diamètre attendu) et d'écart-type 0,08 mm. Un client refuse d'acheter des tubes dont le diamètre ne serait pas compris entre 11,9 mm et 12,2 mm. On cherche à déterminer le pourcentage de tubes acceptés par le client.
$p(11,9 \leqslant X \leqslant 12,2) \approx 0,888$, donc 88,8% des tubes sont acceptés par le client.

► *Exemple 3:* Une variable aléatoire suivant une loi normale est telle que $p(X < 2) = 0,067$ et $p(X < 3) = 0,159$.
On peut en déduire que $p(X > 2) = 1 - p(X \leqslant 2) = 0,933$ et $p(2 < X < 3) = p(X < 3) - p(X < 2) = 0,092$.