

8 Probabilités

8-1 Généralités

Lors d'une expérience aléatoire :

- L'univers Ω est l'ensemble des résultats possibles.
- Un événement A est une partie de l'univers.
- Un événement élémentaire est un événement ne comportant qu'un seul élément.
- L'événement contraire de l'événement A est l'événement noté $\bar{A}$ formé de tous les éléments de Ω n'appartenant pas à A .
- L'événement $A \cap B$ (noté aussi « A et B ») est l'événement formé des éléments de Ω appartenant à A et à B .
- L'événement $A \cup B$ (noté aussi « A ou B ») est l'événement formé des éléments de Ω appartenant au moins à l'un des événements A ou B .
- Deux événements A et B sont dits incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.
- Si $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ et si à chaque résultat possible e_i on associe un nombre $p(e_i)$ tel que $0 \leq p(e_i) \leq 1$ et $p(e_1) + p(e_2) + \dots + p(e_n) = 1$, on dit que l'on a défini une loi de probabilité sur Ω .
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

Pour tous événements A et B :

- $p(\emptyset) = 0$; $p(\Omega) = 1$
- $0 \leq p(A) \leq 1$; $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$; $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
(si A et B sont incompatibles, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$)
- Dans le cas de l'équiprobabilité, $p(A) = \frac{\text{nb d'éléments de } A}{\text{nb d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb de cas possibles}}$

► Exemple : Tirage au hasard d'une carte dans un jeu de 32 cartes avec les événements :

$$p(\text{la carte tirée est un roi}) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} \quad p(\text{la carte tirée est un coeur}) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$
$$p(\text{la carte tirée est un roi et un coeur}) = \frac{1}{32} \quad p(\text{la carte tirée est un roi ou un coeur}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$$

8-2 Probabilités conditionnelles

DÉFINITION

Etant donné deux événements A et B ($B \neq \emptyset$) d'un univers Ω :

- On appelle probabilité de B sachant A , le réel noté $p_A(B)$ tel que $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$

PROPRIÉTÉ

Pour tous événements non vides A et B :

- $0 \leq p_A(B) \leq 1$; $p_A(\bar{B}) = 1 - p_A(B)$
- Dans le cas de l'équiprobabilité, $p_A(B) = \frac{\text{nb de cas favorables pour } A \cap B}{\text{nb de cas favorables pour } A}$
- $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = p(B) \times p_B(A)$

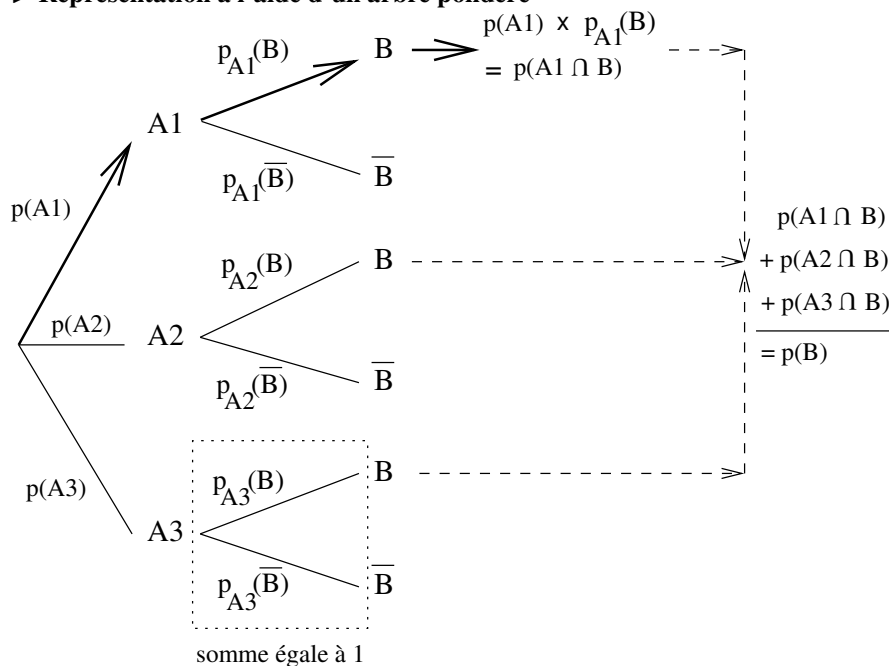
PROPRIÉTÉ

Formule des probabilités totales

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont des événements non vides deux à deux incompatibles et dont l'union est égale à Ω (on dit alors qu'ils forment une partition de l'univers) alors pour tout événement B :

- $p(B) = p(A_1 \cap B) + \dots + p(A_n \cap B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + \dots + p(A_n) \times p_{A_n}(B)$

► Représentation à l'aide d'un arbre pondéré

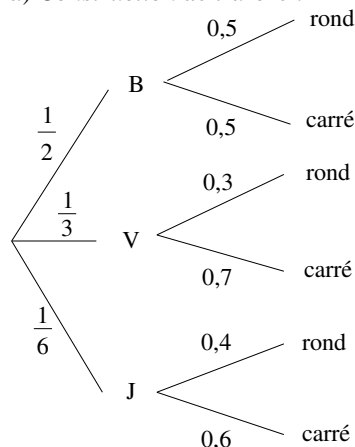


► Règles de construction et d'utilisation des arbres pondérés :

- Sur les premières branches, on inscrit les $p(A_i)$.
- Sur les branches du type $A_i \rightarrow B$, on inscrit $p_{A_i}(B)$.
- Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin.
- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).
- La probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à E .

► Exemple : Un sac contient des jetons de trois couleurs, la moitié de blancs, le tiers de verts et le sixième de jaunes. 50% des jetons blancs, 30% des jetons verts et 40% des jetons jaunes sont ronds. Tous les autres jetons sont carrés. On tire au hasard un jeton.

a) Construction de l'arbre :



b) Sachant que le jeton tiré est blanc, quelle est la probabilité pour qu'il soit carré ?

La lecture directe de l'arbre nous donne que $p_B(C) = 0,5$.

c) Quelle est la probabilité pour que le jeton tiré soit rond ?

$$p(R) = \frac{1}{2} \times 0,5 + \frac{1}{3} \times 0,3 + \frac{1}{6} \times 0,4 = \frac{5}{12}.$$

d) Sachant qu'il est rond, quelle est la probabilité pour qu'il soit blanc ?

$$p_R(B) = \frac{p(B \cap R)}{p(R)} = \frac{\frac{1}{2} \times 0,5}{\frac{5}{12}} = \frac{3}{5}.$$

8-3 Indépendance en probabilité

DÉFINITION

- Deux événements A et B sont dits indépendants si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.
- Ce qui revient à dire que $p_A(B) = p(B)$ ou $p_B(A) = p(A)$

► **Conséquence** : Si l'on répète n fois dans les mêmes conditions la même expérience et si ces expériences $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont indépendantes, alors la probabilité de l'événement $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ est égale au produit $p(A_1) \times p(A_2) \times \dots \times p(A_n)$.

► **Exemple** : Si on lance n fois un dé, la probabilité d'obtenir n fois un nombre pair est égal à $(0,5)^n$.

8-4 Loi numérique associée à une expérience aléatoire

On considère une expérience aléatoire où à chaque résultat possible on peut associer un réel X . On note x_i les valeurs possibles de X et p_i la probabilité que X prenne la valeur x_i .

- Définir la loi de probabilité de X , c'est donner (sous forme d'un tableau) la probabilité de chacun des événements $X = x_i$.

- Espérance mathématique de X : $E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$

- Variance de X : $V(X) = \left(\sum_{i=1}^n p_i (x_i)^2 \right) - (E(X))^2 = p_1 (x_1)^2 + \dots + p_n (x_n)^2 - (E(X))^2$

- Ecart-type de X : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

► **Exemple** : On lance un dé. Le joueur gagne 6 euros s'il obtient un «1» ou un «6» et il perd 2 euros dans le cas contraire. Soit X le gain du joueur.

Loi de probabilité de X : X ne peut prendre que les valeurs -2 et 6.

On a $p(X = -2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ et $p(X = 6) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

x_i	-2	6
p_i (la somme doit être égale à 1)	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

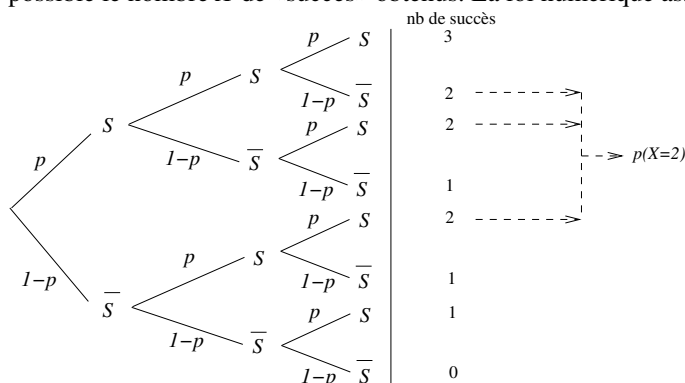
$$E(X) = \frac{2}{3} \times (-2) + \frac{1}{3} \times 6 = \frac{2}{3}; V(X) = \frac{2}{3} \times (-2)^2 + \frac{1}{3} \times (6)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{128}{9} \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{\frac{128}{9}} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

8-5 Loi binomiale

DÉFINITION

- On appelle **épreuve de Bernoulli** toute expérience aléatoire ne présentant que deux issues possibles (contraires l'une de l'autre) que l'on note en général S (pour «succès») et $\bar{S}$.

- Si on répète plusieurs fois de façon identique et indépendante une épreuve de Bernoulli, on peut associer à chaque résultat possible le nombre X de «succès» obtenus. La loi numérique associée à X s'appelle alors une **loi binomiale**.



$$p(X = 2) = p \times p \times (1 - p) + p \times (1 - p) \times p + (1 - p) \times p \times p = 3 \times (1 - p) \times p^2$$