TES$_1$: DEVOIR SURVEILLÉ N°2
CORRIGÉ

Exercice 1 (4 points)

On considère l'inéquation :

$$\ln(2x+1) + \ln(x-3) \leqslant \ln(x+5)$$

Déterminons les contraintes de cette inéquation. (C'est à dire l'ensemble des réels x pour lesquels l'inéquation est définie). Nous savons que la fonction logarithme est définie sur $]0\,;+\infty[$. Nous devons donc avoir :

$$2x+1 > 0 \text{ et } x-3 > 0 \text{ et } x+5 > 0$$

C'est-à-dire : $x > -\dfrac{1}{2}$ et $x > 3$ et $x > -5$

Ce qui s'écrit plus simplement : $\boldsymbol{x > 3}$

Les logarithmes intervenant dans l'inéquation sont donc définis lorsque $x > 3$.

Résolution de l'inéquation : on suppose désormais $x > 3$.

D'après la relation fondamentale du logarithme : $\ln A + \ln B = \ln(AB)$, pour tous réels A et B de $]0\,;+\infty[$ appliquée avec $A = 2x+1$ et $B = x-3$ (quantités strictement positives puisque $x > 3$), nous avons :

$$\ln(2x+1) + \ln(x-3) = \ln[(2x+1)(x-3)]$$

Notre inéquation peut donc s'écrire :

$$\ln[(2x+1)(x-3)] \leqslant \ln(x+5)$$

D'après la propriété : $\ln A \leqslant \ln B \Leftrightarrow A \leqslant B$, pour tous A et B de $]0\,;+\infty[$ appliquée avec $A = (2x+1)(x-3)$ et $B = x+5$ (quantités strictement positives puisque $x > 3$), nous avons :

$$(2x+1)(x-3) \leqslant x+5$$

L'équivalence :
$\ln A \leqslant \ln B \Leftrightarrow A \leqslant B$, pour tous A et B de $]0\,;+\infty[$
traduit la croissance de la fonction logarithme sur $]0\,;+\infty[$

En développant le membre de gauche :

$$2x^2 - 5x - 3 \leqslant x+5$$

D'où : $2x^2 - 6x - 8 \leqslant 0$

En divisant les deux membres par 2 : $x^2 - 3x - 4 \leqslant 0$

Le trinôme du second degré $x^2 - 3x - 4$ admet deux racines : $x_1 = -1$ et $x_2 = 4$.

D'où la factorisation : $(x+1)(x-4) \leqslant 0$

Résolvons cette dernière inéquation (à l'aide d'un tableau de signes) :

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
signe du produit $(x+1)(x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Justification des signes

$x+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -1$

$x-4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 4$

Bilan :

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(x+1)(x-4) \leqslant 0$ est $[-1\,;4]$.

L'ensemble S des solutions de l'inéquation $\ln(2x+1) + \ln(x-3) \leqslant \ln(x+5)$ est donc, en tenant compte de la condition $x > 3$: $\boldsymbol{S =]3\,;4]}$

Exercice 2 (8 points)

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln x$$

On note C_f sa représentation graphique.

1. Étude des limites de f et du comportement asymptotique de C_f.

   a) Nous savons que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$$

   Donc, par différence : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

   Comme f admet une limite **infinie** en 0, C_f admet donc une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

   b) En raisonnant sur l'écriture "$x - \ln x$", nous avons, en $+\infty$, une indétermination du type "$\infty - \infty$". Pour lever cette indétermination, on peut se ramener à un produit, en écrivant :

$$x - \ln x = x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$$

   Nous savons que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = 1 \text{ puisque } \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ (limite de référence)} \end{cases}$$

   Donc, par produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

   Comme la limite de f en $+\infty$ **n'est pas finie**, C_f n'admet pas d'asymptote horizontale en $+\infty$.

2. Étude du sens de variation de f

   a) On a immédiatement : $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$.

   b) En réduisant au même dénominateur : $f'(x) = \frac{x-1}{x}$ pour tout $x \in\ ]0\,;+\infty[$

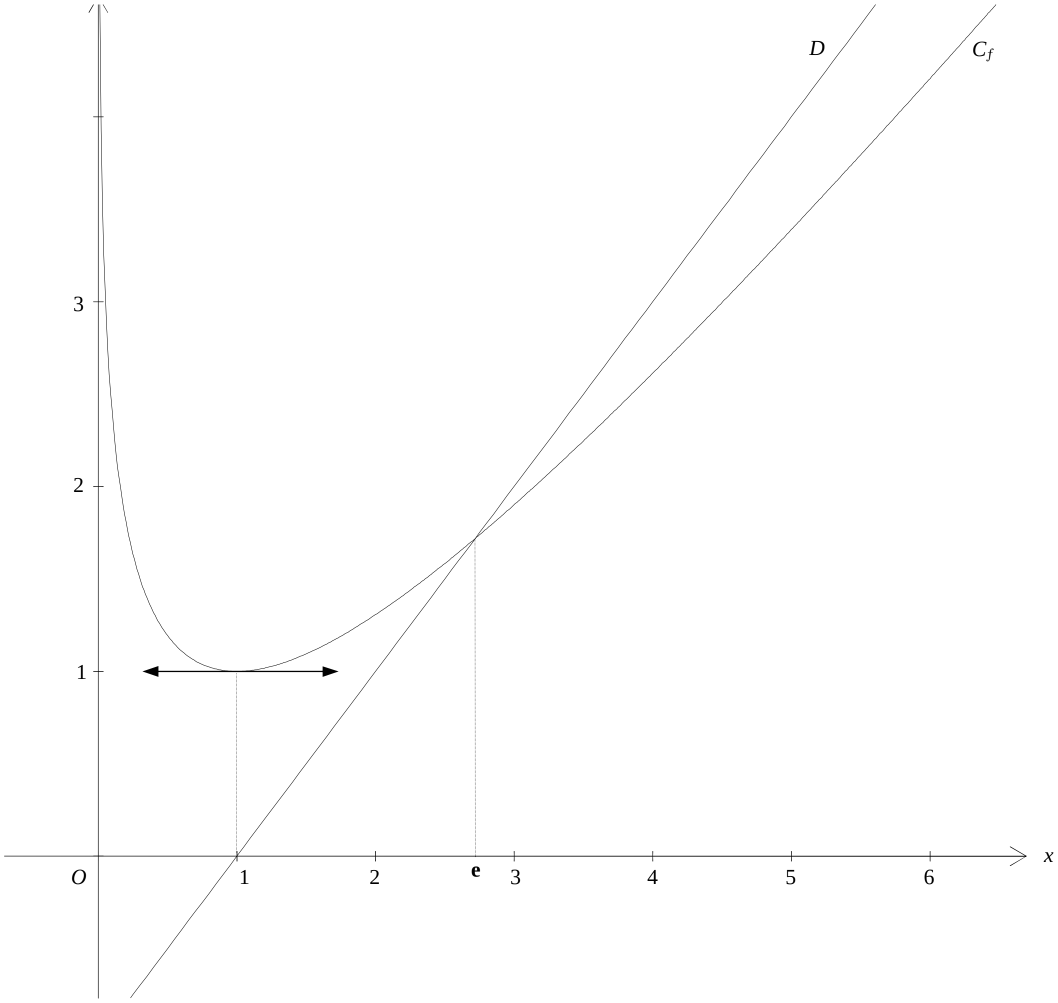
   c) Tableau de variation de la fonction f :

x	0		1		$+\infty$
signe de $x - 1$		$-$	0	$+$	
signe de x	0	$+$		$+$	
Signe de f'	||	$-$	0	$+$	
Variations de f	|| $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

   Minimum en 1 : $f(1) = 1 - \ln 1 = 1$

3. Représentation graphique.

   a)



b) L'équation $f(x) = x - 1$ s'écrit : $x - \ln x = x - 1$

C'est-à-dire : $\ln x = 1$

La contrainte de cette équation est $x > 0$.

En remplaçant 1 par ln **e**, on obtient : $\ln x = \ln \mathbf{e}$

D'après la propriété : $\ln A = \ln B \iff A = B$, pour tous A et B dans $]0\ ;+\infty[$, on a :

$$x = \mathbf{e}$$

Comme **e** > 0, on a : $S = \{\mathbf{e}\}$

Exercice 3 (8 points) *Comparaison de deux ajustements affines : droite de Mayer et droite de régression*

2. Point moyen du nuage : $G(17200\ ;\ 2455)$
3. Coefficient de corrélation linéaire : $r \simeq 0{,}997$ (à 10^{-3} près).

   On a : $r^2 \simeq 0{,}993$ (à 10^{-3} près). Comme $r^2 >> 0{,}75$, un ajustement affine est largement justifié.
4. a) $G_1(9975\ ;\ 1300)$ et $G_2(24425\ ;\ 3610)$

   b) Équation de la droite (G_1G_2).

   Coefficient directeur : $m = \dfrac{y_{G_2} - y_{G_1}}{x_{G_2} - x_{G_1}} = \dfrac{3610 - 1300}{24425 - 9975} = \dfrac{2310}{14450} \simeq 0{,}16$ (à 10^{-2}près)

   Ordonnée à l'origine : $p = y_{G_1} - m x_{G_1} = 1300 - \dfrac{231}{1445} \times 9975 \simeq -295$ (à l'unité près)

   D'où : $(G_1G_2) : y = 0{,}16x - 295$

c)

X	5100	7800	11200	15800	20100	22500	26200	28900
Y	620	1080	1480	2020	3000	3360	3880	4200
$0{,}16X - 295$	521	953	1497	2233	2921	3305	3897	4329
$Y - (0{,}16X - 295)$	99	127	–17	–213	79	55	–17	–129
$[Y - (0{,}16X - 295)]^2$	9801	16129	289	45369	6241	3025	289	16641

D'où $S = 9801 + 16129 + 289 + 45369 + 6241 + 3025 + 289 + 16641 = 97784$.

5. a) Droite de régression de y en x : $y = ax + b$ avec $a \simeq 0{,}154$ (à 10^{-3} près) et $b \simeq -195$ (à l'unité près)

$$y = 0{,}154x - 195$$

b) On sait que la droite de régression D minimise la somme des résidus quadratiques. C'est donc la droite D qui réalise le meilleur ajustement affine.

6. a) Avec $x = 23400$, on trouve : $y = 0{,}154 \times 23400 - 195 = 3408{,}6 \simeq 3408$ (à l'unité près par défaut)

On peut donc estimer qu'il y aura 3408 commandes chaque mois pour ce produit.

b) Avec $y = 1800$, on a : $1800 = 0{,}154x - 195$ d'où $x \simeq 12955$ (à l'euro près par excès)

On peut donc prévoir un budget mensuel de 12955 € pour la publicité de ce produit.