La calculatrice est autorisée. Les exercices sont indépendants.

Une grande part de la notation sera accordée à la rédaction et aux justifications données (sauf QCM)

Exercice 1 (6 points) *QCM sur les QCM*

*Pour chaque question, **une et une seule** des 4 propositions P_1, P_2, P_3 et P_4 est exacte.*
Barème par question : réponse correcte cochée : 1 point, absence de réponse : 0 point, autres cas : –0,5 point.
On complétera, ci-dessous, la grille de réponse qui est à rendre avec la copie.
Si le total des points est négatif, la note de cet exercice est ramenée à 0.

Un QCM comporte 6 questions. Pour chaque question, 4 propositions sont données et une seule est exacte.

Un élève coche une proposition au hasard pour chacune des 6 questions.

1. La probabilité qu'il obtienne les 6 réponses correctes est égale à :

   P_1 □ $\frac{1}{6}$ P_2 □ $\left(\frac{1}{4}\right)^6$ P_3 □ $\frac{3}{2}$ P_4 □ $\frac{1}{24}$

2. La probabilité qu'il obtienne 6 réponses incorrectes est, à 10^{-3} près, égale à :

   P_1 □ 0,666 P_2 □ 0,833 P_3 □ 0,125 P_4 □ 0,178

3. La probabilité qu'il obtienne, sur l'ensemble du QCM, exactement deux réponses correctes (et donc 4 incorrectes) est, à 10^{-3} près, égale à :

   P_1 □ 0,297 P_2 □ 0,019 P_3 □ 0,020 P_4 □ 0,333

4. La probabilité qu'il obtienne, sur l'ensemble du QCM, au moins une réponse correcte est, à 10^{-3} près, égale à :

   P_1 □ 0,822 P_2 □ 0,833 P_3 □ 0,333 P_4 □ 0,875

5. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de réponses correctes obtenues.

   L'espérance de X est égale à :

   P_1 □ 1 P_2 □ 1,5 P_3 □ $\frac{1}{6}$ P_4 □ $\frac{1}{4}$

6. On note Y la variable aléatoire correspondant à la note obtenue par cet élève. (Le système de notation est le même que le QCM que vous êtes en train de faire)

   L'espérance de Y est, à 10^{-2} près, égale à :

   P_1 □ 0,32 P_2 □ –0,75 P_3 □ 0 P_4 □ 1,5

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Nom : ______________________ Prénom : _________________

Grille de réponses au QCM. (Mettre une croix pour chaque proposition correcte)

Proposition / n° question	P_1	P_2	P_3	P_4	Points obtenus (Ne pas compléter cette colonne)
1					
2					
3					
4					
5					
6					
				Total	

Exercice 2 **(4 points)** *Le téléphone arabe*

Des individus I_1, I_2, ..., I_n, ... se transmettent une information dans cet ordre. Chaque individu transmet l'information de manière fidèle avec une probabilité égale à 0,8 ou la change en son contraire avec une probabilité égale à 0,2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement "le $n^{\text{ème}}$ individu reçoit l'information non déformée" et $p_n = P(A_n)$.

On suppose que $p_1 = 1$ (le premier individu I_1 possède l'information non déformée). On a donc $p_2 = 0{,}8$.

1. Calculer p_3.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$p_{n+1} = 0{,}6p_n + 0{,}2$$
3. Exprimer p_n en fonction de n.
4. En déduire la probabilité que le $10^{\text{ème}}$ individu reçoive l'information non déformée. (On donnera une valeur approchée à 10^{-3} près)
5. Étudier la limite de la suite (p_n).

Exercice 3 **(5 points)** *Avec des cartes*

1. Une grande enveloppe contient les douze "figures" d'un jeu de carte : les quatre rois, les quatre dames et les quatre valets. On tire, simultanément et au hasard, cinq cartes de l'enveloppe.
   a. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux rois.
   b. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un roi.
   c. Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de rois obtenus.
   Donner la loi de probabilité de X (sous la forme d'un tableau) et calculer son espérance mathématique.
   Interpréter cette espérance.
2. Dans la même enveloppe contenant les mêmes douze cartes, on effectue successivement cinq fois le tirage d'une carte que l'on remet à chaque fois dans l'enveloppe. Soit Y la variable aléatoire correspondant au nombre de rois obtenus au cours de ces cinq tirages.
   a. Calculer la probabilité d'obtenir 5 fois un roi.
   b. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux rois.
   c. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un roi.
   d. Calculer l'espérance mathématique de Y. Interpréter.
3. Dans la même enveloppe contenant toujours les mêmes douze cartes, on effectue maintenant n fois le tirage d'une carte avec remise. Y désigne encore la variable aléatoire correspondant au nombre de rois obtenus au cours des n tirages.
   Combien de tirages faut-il effectuer (au minimum) pour être sûr à 95% d'obtenir au moins un roi ?

Exercice 4 **(5 points)** *Pertinence d'un test de dépistage*

Dans une population donnée, la proportion d'individus atteint d'une certaine maladie est x. ($0 \leqslant x \leqslant 1$)

On dispose d'un test de dépistage de cette maladie et on voudrait étudier sa fiabilité.

On dispose des données suivantes :

- on effectue le test de dépistage sur 100 personnes considérées comme malades : 98 ont un test positif.
- on effectue le test de dépistage sur 100 personnes considérées comme saines : une seule a un test positif.

On choisit au hasard un individu de cette population et on le soumet au test.

On note : M = " l'individu est malade "

T = " l'individu a un test positif "

On note $f(x)$ la probabilité qu'un personne ayant un test positif soit malade.

1. Montrer que : $$f(x) = \frac{98x}{97x+1}$$

   Tracer la courbe de la fonction f sur l'intervalle [0, 1].

2. On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit malade est supérieure à 0,95.

   Le test est-il fiable si la proportion x d'individus atteints de la maladie est de 0,05 (5%) ?

   À partir de quelle proportion x le test est-il fiable ?

MINI FORMULAIRE

Si B est tel que $P(B) \neq 0$, la probabilité, sachant B, de A est $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Formule des probabilités totales : si $B_1, ..., B_n$ est une partition de Ω : $P(A) = P(A \cap B_1) + ... + P(A \cap B_n)$

Des événements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p alors :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \text{ (pour tout } k \in \{0 ; 1 ; ... ; n\}) \text{ et } E(X) = np$$