Site : http://francois.schulhof.perso.neuf.fr/cours_maths/

CORRECTION CET EXERCICE

Partie A

1. $P(X \leq 496) = 0,5 - P(496 \leq X \leq 500) \approx 0,02$

2. $P(497 \leq X \leq 500) \approx 0,43$

3. La variable aléatoire $Y = \dfrac{X-500}{2}$ suit la loi normale centrée réduite.

   On veut trouver la valeur de α afin que :
   $P(500-\alpha \leq X \leq 500+\alpha) = 0,95 \Leftrightarrow P(-\alpha \leq X-500 \leq \alpha) = 0,95$

$$\Leftrightarrow P\left(-\frac{\alpha}{2} \leq \frac{X-500}{2} \leq \frac{\alpha}{2}\right) = 0,95$$

$$\Leftrightarrow 2\Phi\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) - 1 = 0,95$$

$$\Leftrightarrow 2\Phi\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) = 1,95$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) = 0,975$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} \approx 1,96$$

$$\Leftrightarrow \alpha \approx 3,92$$

Partie B

On a $n = 200$ et $p = 0,97$

Par conséquent $n \geq 30$, $np = 194 \geq 5$ et $n(1-p) = 6 \geq 5$

Les conditions sont vérifiées pour déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95%.

$$I_{200} = \left[0,97 - 1,96 \times \sqrt{\frac{0,97 \times 0,03}{200}} ; 0,97 + 1,96 \times \sqrt{\frac{0,97 \times 0,03}{200}}\right]$$

$$\approx [0,946 ; 0,994]$$

La fréquence observée des bouteilles conformes est $f = \dfrac{185}{200} = 0,925 \notin I_{200}$.

Ainsi, au risque de 5%, le test effectué remet en cause l'affirmation de l'entreprise.